Les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}_K$

Exercice 1 Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $L = \operatorname{supp} f$. Que peut on dire de la distance (euclidienne) de L à $\partial\Omega$? Même question pour $f \in \mathcal{D}_K$.

Exercice 2 Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

(a) Construire une suite K_n de compacts telle que $K_n \subseteq K_{n+1}$ $\forall n$ et $\bigcup_n K_n = \Omega$.

(b) On pose $p_n(f) := \|f\|_{C^n(K_n)}$ et

$$d(f,g) := \sum_n 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Soit $f_n \in \mathcal{D}_{K_{n+1}}$ tel que $f|_{K_n} \equiv 1$. Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy par rapport à d.

(c) Déduire que $(\mathcal{D}(\Omega), d)$ n'est pas complet.

Ceci n'est donc pas la bonne approche ...

Exercice 3 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et K un compact non-vide de Ω. Donner la définition de la convergence d'une suite de fonctions (φ_k) vers φ dans la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$. Montrer que $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$, i.e. que $\mathrm{Id} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega)$ est un opérateur linéaire continu. Indication: utiliser la caractérisation de la continuité par les suites convergentes.

Exercice 4 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide. Soit (x_n) une suite convergente de Ω tel que $\lim x_n \in \partial\Omega$. Soit (c_n) une suite de réels strictement positives. Montrer que

$$U := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |\varphi(x_n)| < c_n\}$$

est convexe, symétrique. Soit $K \subset \Omega$ compact. Montrer que $K \cap \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ est fini. En déduire que A est un ouvert (on pourra montrer que $A^{\complement}$ est fermé).

Exercice 5 Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par

$$f_n(t) = \frac{1}{2^n} \exp\Big(\frac{-1}{1-(t/n)^2}\Big) \quad \text{si } |t| < n$$

et zéro sinon. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ que l'on précisera. A-t-on convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Exercice 6 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide.

(a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\psi|_{K^\complement} \neq 0$. Montrer que $\varphi + \frac{1}{n}\psi \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) En déduire que $\mathcal{D}_K$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

(c) Montrer que $\mathcal{D}_K$ est un fermé.

(d) Utiliser une suite K_n de compacts telle que $K_n \subseteq K_{n+1}$ pour tout n et $\bigcup_n K_n = \Omega$ pour montrer que $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup \mathcal{D}_{K_n}$.

(e) Est-ce que la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ peut provenir d'une distance (on appelle une telle topologie *métrisable*)?

EXERCICE 7 Soit K un compact non-vide de $\mathbb{R}^n$. Rappeler la distance d de $\mathcal{D}_K$.

(a) Montrer que $\mathcal{D}_K$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

(b) Montrer qu'un ensemble $A \subseteq \mathcal{D}_K$ est borné (pour la distance d) si et seulement si il est borné par rapport à toute semi-norme $p_k(f) = \|f\|_{C^k(K)}$.

(c) Est-ce que la limite uniforme d'une suite de fonctions de classe C^∞ est forcément de classe C^∞?

(d) Soit $A \subseteq \mathcal{D}_K$ fermé et borné. Montrer que A est compact. Indications:

  (i) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans A. Utiliser la bornitude de $A_1 = \{f' : f \in A\}$ pour trouver une sous-suite extraite de $(f_n)_{n\geq 0}$ qui converge uniformément (Ascoli-Arzela!). On l'appellera $(f_n^{(1)})_{n\geq 0}$.

  (ii) Utiliser ensuite la bornitude uniforme de $A_2 = \{f'' : f \in A\}$ pour trouver une sous-suite extraite de $(f_n^{(1)})_{n\geq 0}$ telle que $(f_n^{(1)})_{n\geq 0}$ et $(f_n^{(1)\prime})_{n\geq 0}$ convergent uniformément. On appellera cette nouvelle sous-suite $(f_n^{(2)})_{n\geq 0}$.

  (iii) Par récurrence on obtient des sous-suites extraites $(f_n^{(k)})_{n\geq 0}$ pour lesquelles les premières k dérivées (0-ième jusqu'à la $k-1$-ième) convergent uniformément. Prenons la 'diagonale' $g_n := f_n^{(n)}$. Montrer que $(g_n)_{n\geq 0}$ converge vers une fonction de classe C^∞.

  (iv) Conclure.

(e) Est-ce que la topologie de $\mathcal{D}_K$ peut provenir d'une norme?

Exemples

EXERCICE 8 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. A quelle condition existe-t-il $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $F' = \varphi$?

EXERCICE 9

(a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $\delta \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\delta * f = f$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R})$.

(b) Existe-t-il une telle fonction $\delta \in L^1(\mathbb{R})$?

Indication: considérer $f_n(x) = nf(nx)$ pour une fonction positive $f \in C_c(\mathbb{R})$ (respectivement $\in L^1(\mathbb{R})$) convenablement choisie qui satisfait $f(0) = 1$ et $\|f\|_{L^1} = 1$.

EXERCICE 10 Démontrer que l'on définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \qquad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx.$$

Cette distribution, dite *valeur principale* est noté $\mathrm{vp}(1/x)$. Montrer que son ordre est inférieur ou égal à 1.

EXERCICE 11 Pour $-2 < \alpha < -1$ et $\varepsilon > 0$ montrer que quelque soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x) \, dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où la constante A ne dépend pas de $\varepsilon > 0$. Montrer que R_ε tend vers une limite quand $\varepsilon \to 0+$. On appelle

$$\langle \mathrm{pf}\ x_+^\alpha, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} R_\varepsilon$$

la *partie finie* de x^α. Montrer qu'il s'agit d'une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

EXERCICE 12 Démontrer que la formule $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Quelle est son ordre?

EXERCICE 13 Démontrer que la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$$

définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Cette distribution, est-elle d'ordre fini?
Indication: on pourra procéder par l'absurde: si T est d'ordre $m \in \mathbb{N}$, on choisit $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$ égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et on pose pour $\lambda > 1$

$$\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} h(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \psi\big(\lambda(x - (m+1))\big).$$

EXERCICE 14 Soit $0 \neq \varphi$ une fonction positive de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de support dans $]0, \infty[$. Démontrer qu'il existe deux constantes $C, \beta > 0$ telles que, pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\int_0^\infty \exp(n/t)\varphi(t) \, dt \geq C \exp(\beta n).$$

En déduire qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0, \infty[)$ on ait

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty \exp(1/t)\varphi(t) \, dt.$$

On pourra considérer les fonctions $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$ pour un $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[1/2, 1]$.