

M1MI2011

Exercices sur les fonctions continues

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.

Exercice 2. En revenant à la définition, démontrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$.

Exercice 3. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$ et que $f(]1, +\infty[) \subset]1, +\infty[$.
2. Soit la suite (x_n) définie par $x_0 \in]0, 1[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) est croissante.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \inf\{|x - t| : t \in]0, 1]\}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.
3. En déduire que f est continue sur \mathbb{R} .
4. Déterminer l'expression de f sur chacun des intervalles : $] - \infty, 0],]0, 1],]1, +\infty[$.

Exercice 6. Montrer qu'une fonction continue périodique sur \mathbb{R} y est bornée.

Exercice 7. Montrer qu'une fonction continue, positive sur $[0, +\infty[$ et qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, est bornée et elle atteint sa borne supérieure. Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur intervalle I ouvert de \mathbb{R} et $x_0 \in I$. Montrer que f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de I qui converge vers x_0 , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Exercice 9. Montrer que deux fonctions continues qui coïncident sur \mathbb{Q} , coïncident sur \mathbb{R} .

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(2x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 11.

1. Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie sur \mathbb{R} par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de \mathbb{R} .

2. Déterminer la nature des points de discontinuité de la fonction $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, définie sur \mathbb{R} .

Exercice 12. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles telle que $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $r \in \mathbb{Q}$, calculer $f(p), f(1/p), f(r)$ en fonction de $f(1)$.
3. On suppose de plus que f est continue. Montrer qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors il y a $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Soit P un polynôme de degré impair. P admet-t-il une racine réelle ?

Exercice 14. Soit $p, q > 0$ et f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} .

En considérant la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = pf(a) + qf(b) - (p + q)f(x)$, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c).$$

Exercice 15. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_p \in [0, 1]$ tel que $f(x_p + 1/p) = f(x_p)$ (on pourra considérer la fonction $g(x) = f(x + 1/p) - f(x)$).

Exercice 16. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par f d'un segment est un segment.
3. L'image par f d'une partie bornée est bornée.
4. L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.