Une formule de H. Levine
et la construction de courants de Green

(Bordeaux, 15 Novembre 1999)

1. Une formule de H. Levine.

Étant données p fonctions $f_1, ..., f_p$ holomorphes de n variables définissant une intersection complète dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, on a, si $[Z(f_1, ..., f_p)]$ désigne le courant d'intégration (de type (p,p)) correspondant au cycle effectif $Z(f_1, ..., f_p)$ attaché au faisceau d'idéaux $f_1\mathcal{O} + \ldots + f_p\mathcal{O}$, la formule de Lelong-Poincaré

$$[Z(f_1, ..., f_p)] = df_1 \wedge \ldots \wedge df_p \wedge \bigwedge_{j=1}^{p} \overline{\partial}\Big[\frac{1}{f_j}\Big]\,, \tag{1}$$

où

$$\bigwedge_{j=1}^{p} \overline{\partial}\Big[\frac{1}{f_j}\Big]$$

désigne le courant résidu (au sens de Coleff-Herrera) attaché au faiseau d'idéaux $f_1\mathcal{O} + \ldots + f_p\mathcal{O}$. Une autre manière d'écrire cette formule consiste en la formulation

$$[Z(f_1, ..., f_p)] = [dd^c(\log(\|f\|^2))]^p\,, \tag{2}$$

où $\|f\|^2 = |f_1|^2 + \cdots + |f_p|^2$ et le produit de courants positifs fermés au membre de droite de (2) est défini suivant le mécanisme classique d'intégration par parties (on sait multiplier un courant positif fermé par une fonction plurisousharmonique). Cette seconde formule autorise la construction explicite d'un courant de Green G relatif au cycle effectif $Z(f_1, ..., f_p)$, c'est à dire un $(p-1, p-1)$-courant dans U solution de

$$dd^c[G] + [Z(f_1, ..., f_p)] = 0\,.$$

Il suffit de définir G par

$$G = -\log(\|f\|^2)\ [dd^c(\log(\|f\|^2))]^{p-1}\,.$$

Passons maintenant à une <u>situation géométrique globale</u> (dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n$) et supposons que $F_1, ..., F_p$ sont p polynômes homogènes en les $n+1$ variables $(z_0, ..., z_n)$, tous de même degré D, et définissant un cycle effectif $Z(F_1, ..., F_p)$ intersection complète dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Notons

$$\omega = dd^c \log(|z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2)$$

la $(1,1)$-forme volume (exprimée ici en coordonnées homogènes) définissant la métrique Kählerienne sur $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. La formule (2) se globalise, $[Z(F_1, ..., F_p)]$ désignant toujours le courant d'intégration (avec multiplicités) correspondant au cycle effectif sur attaché au faisceau d'idéaux $F_1\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}+\ldots+F_p\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}$, en la formule

$$[Z(F_1,...,F_p)] = \left[dd^c\Big(\log\frac{\sum_{j=1}^{p}|F_j(z_0,...,z_n)|^2}{(|z_0|^2+\cdots+|z_n|^2)^D}\Big)\right]^p. \tag{3}$$

Si l'on note

$$\|F\|^2 := \sum_{j=1}^{p}|F_j|^2\,,$$

on déduit de cette formule que le courant G défini par

$$G = -\log\Big(\frac{\|F(z)\|^2}{(|z_0|^2+\ldots+|z_n|^2)^D}\Big)\left(\sum_{k=0}^{p-1}[dd^c(\log\|F(z)\|^2)]^k\wedge[D\omega(z)]^{p-1-k}\right) \tag{4}$$

vérifie

$$dd^cG+[Z(F_1,...,F_p)] = D^p\omega^p = \deg\,(Z(F_1,...,F_p))\omega^p\,. \tag{5}$$

Si H désigne la projection harmonique relativement à la décomposition de Hodge dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, on remarque que (5) s'écrit encore

$$dd^cG+[Z(F_1,...,F_p)] = H([Z(F_1,...,F_p)])$$

et le courant $G-H(G)$ est l'unique $(p-1,p-1)$ courant (aux formes de type $du+d^cv$ près) solution du système

$$\begin{aligned}&dd^cG+[Z(F_1,...,F_p)] = H([Z(F_1,...,F_p)])\\&H(G)=0\end{aligned}$$

Un tel courant est appelé courant de Green normalisé attaché au cycle effectif $Z(F_1,...,F_p)$. La formule (3') est appelée formule de Levine; démontrée par H. Levine [Lev] dans le cas où les F_j définissent une sous-variété de $\mathbf{P}^n$, elle a été exploitée dans le cadre plus général où nous la mentionnons dans les travaux de Griffiths et King [GK]. La formule de Levine permet la construction d'un courant de Green normalisé attaché à un cycle $Z(F_1,...,F_p)$ défini comme une intersection complète dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. En effet, si $D_j=\deg F_j$, $j=1,...,p$, et si $D=l_1D_1=\ldots=l_pD_p$ est le PPCM des D_j, alors le courant de Green normalisé relatif au cycle $Z(F_1,...,F_p)$ s'obtient comme

$$G=\frac{\mathcal{G}}{l_1\cdots l_p}\,,$$

où $\mathcal{G}$ est un courant de Green normalisé attaché au cycle $Z(F_1^{l_1},...,F_p^{l_p})$, défini, lui, par des polynômes homogènes de même degré D. De plus, le courant de Green normalisé construit selon ce procédé est un courant régulier hors du support du cycle effectif auquel il est attaché.

Un exemple important où s'applique la formule de Levine est celui du cycle effectif de $\mathbf{P}^{2n+1}(\mathbb{C})$ défini, si les coordonnées homogènes y sont notées $(z_0, ..., z_n, w_0, ..., w_n)$, par les équations

$$z_j = w_j \,,\ j = 0, ..., n \,.$$

Notons L le (n, n) courant de Green attaché à ce cycle via la formule de Levine (4). Si π est l'application de $(\mathbb{C}^{n+1})^* \times (\mathbb{C}^{n+1})^* \times (\mathbb{C}^2)^*$ dans $\mathbf{P}^{2n+1}(\mathbb{C})$ obtenue par passage au quotient depuis l'application

$$((\mathbb{C}^{n+1})^*)^2 \times (\mathbb{C}^2)^* \mapsto (\mathbb{C}^{2(n+1)})^* : \ (z, w, (\beta_0, \beta_1)) \mapsto (\beta_0 z, \beta_1 w) \,,$$

on est à même de définir un $(n-1, n-1)$-courant de Green sur $\mathbf{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ attaché à la diagonale Δ de cette variété algébrique par

$$\widetilde{L}(z, w) := \int_{\beta \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})} \pi^*[L](z, w, \beta) \,.$$

2. Hauteur arithmétique d'un cycle.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ est un polynôme en une variable, de degré n, et de racines $\alpha_1, ..., \alpha_n$, la formule de Jensen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta = \log \Big[|a_0| \prod_{j=1}^n \frac{1}{\min(|\alpha_j|, 1)} \Big] = \log \Big[|a_n| \prod_{j=1}^n \max(|\alpha_j|, 1) \Big] \geq 0$$

montre, en particulier si l'on pense le polynôme à coefficients entiers, qu'il y a une intime relation entre l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(re^{i\theta})| d\theta$$

et la quantification arithmétique du polynôme P. En particulier, la positivité de cet intégrale permet de conclure que si $P = P_1 P_2$, $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P_j(e^{i\theta})| d\theta \,, \quad j = 1, 2 \,.$$

De fait, G. Faltings [Fa], puis J.B. Bost, H. Gillet, C. Soulé [BGS] ont développé une théorie arithmétique de l'intersection dans laquelle l'expression de la hauteur d'un cycle arithmétique $\mathcal{Z}$ du schéma projectif $\mathrm{Proj}\, \mathbb{Z}[X_0, ..., X_n]$ se trouve directement liée (pourvu que le cycle complexe $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ soit de codimension pure d dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ à la connaissance d'un courant de Green normalisé associé à ce cycle, choisi de manière à être régulier hors du support de ce cycle. Concrètement, si Z est un cycle sur $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ défini par $(F_1, ..., F_p)$, où les F_j sont dans $\mathbb{Z}[X_0, ..., X_n]$, de support de codimension pure égale à d et si $G = G_Z$ est un tel $(d-1,d-1)$- courant, la hauteur arithmétique du cycle se calcule une fois choisies $n+1-d$ formes linéaires génériques et à coefficients entiers

$$< u^{(0)}, z >, \dots, < u^{(n-d)}, z >$$

par

$$h(Z) = \sum_{\tau \text{ premier}} n_\tau \log \tau + \frac{\deg Z}{2} \sum_{k=d}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} + \frac{1}{2} \int_{\Pi_u} G_Z \,,$$

où

$$\Pi_U := \{ < u^{(j)}, z >= 0;\ j = 0, ..., n-d \}$$

et

$$\sum_{\tau \text{ premier}} n_\tau \{\tau\}$$

est le cycle arithmétique de codimension $n+1$ dans le schéma projectif $\mathrm{Proj}\,\mathbb{Z}[X_0, ..., X_n]$ associé au système $(F_1, ..., F_p, < u^{(0)}, z >, ..., < u^{(n-d)}, z >)$. On peut montrer qu'il y a un jeu de balancier entre les contributions arithmétiques et analytiques à l'expression de la hauteur et que cette hauteur ne dépend pas du choix de U. Dans le cas $p = d = 1$ par exemple, elle s'exprime par

$$h(Z) = \frac{\deg F_1}{2} \sum_{k=d}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} + \int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})} \log \frac{|F_1(z)|}{\|z\|^{\deg F_1}} \; [\omega(z)]^n \,.$$

3. Une fonction zeta attachée à un cycle intersection complète.

Nous allons envisager une autre approche de la formule de Levine, basée cette fois sur la régularisation des courants via le prolongement analytique. Supposons toujours que $F_1, ..., F_p$ sont p polynômes homogènes tous de degré D et définissant une intersection complète dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Introduisons la fonction définie globalement sur $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ et en coordonnées homogènes par

$$\|F(z)\|_\rho^2 = \sum_{j=1}^{p} \frac{|F_j(z)|^2}{\|z\|^{2D}}$$

et considérons la fonction méromorphe de $\mathbb{C}$ dans l'espace des $(p-1,p-1)$-courants sur $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ définie par

$$\lambda \mapsto \mathbf{G}_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \|F\|_\rho^{2\lambda} \Big(\sum_{k=0}^{p-1} (dd^c \log \|F\|_\rho^2)^k \wedge (D\omega)^{p-1-k} \Big) \,.$$

Le fait que cette fonction (définie à priori dans un demi-plan $\mathrm{Re}\,\lambda >> 1$) puisse se prolonger en une fonction méromorphe est classique; les pôles du prolongement sont d'ailleurs (outre $\lambda = 0$) des points de la forme $\gamma - l$, $l \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \{\gamma_1, ..., \gamma_M\} \subset \mathbb{Q}^-$. De plus, le recours à la résolution des singularités nous montre que $\lambda = 0$ est un pôle au plus simple. Calculons, pour $\mathrm{Re}\,\lambda >> 1$,

$$dd^c \mathbf{G}_\lambda = \|F\|_\rho^{2\lambda} D^p \omega^p - \frac{i}{2\pi} \lambda \partial \log \|F\|_\rho^2 \wedge \overline{\partial} \log \|F\|_\rho^2 \wedge (dd^c \log \|F\|_\rho^2)^{p-1} + R_\lambda,$$

où

$$R_\lambda = -\frac{i}{2\pi} \lambda \|F\|_\rho^{2\lambda} \partial \log \|F\|_\rho^2 \wedge \overline{\partial} \log \|F\|_\rho^2 \wedge \Big(\sum_{k=1}^{p-1} (dd^c \log \|F\|_\rho^2)^{k-1} \wedge (D\omega)^{p-k} \Big).$$

On remarque ensuite, si k est un entier entre 1 et $p-1$, qu'alors pour toute fonction-test de type $(n-k, n-k)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))$, la fonction

$$\lambda \mapsto \lambda \int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})} \|F\|_\rho^{2\lambda} \partial \log \|F\|_\rho^2 \wedge \overline{\partial} \log \|F\|_\rho^2 \wedge (dd^c \log \|F\|_\rho^2)^{k-1} \varphi$$

est (à une constante près) la transformée de Mellin de la fonction

$$\epsilon \mapsto \frac{1}{\epsilon^k} \int_{\|F\|_\rho^2 = \epsilon} \Big[\sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_k \\ 1 \le i_l \le p}} \Omega(s; \{i_1, \ldots, i_k\}) \wedge \bigwedge_{l=1}^{k} dF_{i_l} \Big] \wedge \varphi$$

où $s_j = \|z\|^{-2D} \overline{F_j}$, $j = 1, \ldots, p$ et

$$\Omega(s; i_1, ..., i_k) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} s_{i_l} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \ne l}}^{k} ds_{i_j}.$$

Il se trouve que ce calcul fait apparaitre de manière détournée les courants résiduels dont les formules du type Bochner-Martinelli suggèrent la construction et sur lesquels nous reviendrons dans la section suivante. Disons ici simplement que, si les F_j définissent une intersection complète, alors tous les courants résiduels obtenus sur le modèle

$$\varphi \in \mathcal{D}^{(n,n-k)}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})) \mapsto \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^k} \int_{\|F\|_\rho^2 = \epsilon} \Omega(s; \{i_1, ..., i_k\}) \wedge \varphi$$

sont bien définis et nuls lorsque $k = 1, ..., p-1$. On conclut de cela que le coefficient de λ^0 dans le développement en série de Laurent de $\lambda \mapsto G_\lambda$ au voisinage de $\lambda = 0$ est bien un courant de Green (régulier hors du support du cycle intersection complète que définissent les F_j) pour ce cycle $Z(F_1, ..., F_p)$. L'avantage de cette approche, outre qu'elle permette d'exprimer la contribution analytique à la hauteur du cycle Z comme le résidu en $\lambda = 0$ d'une certaine fonction zeta, suggère une extension au cadre non intersection complète.

4. L'approche du courant d'intégration dans le cas non-intersection complète.

4.a *Le point de vue semi-local.*

Si $f_1, ..., f_p$ désignent p fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, et définissant dans cet ouvert une variété algébrique de codimension d, il est bien classique que le courant

$$[dd^c \log \|f\|^2]^d\,, \tag{6}$$

où

$$\|f\|^2 := \sum_{j=1}^{p} |f_j|^2\,,$$

s'il est bien un courant positif fermé dans U, est en fait un courant en général *diffus* dans U tout entier, et par conséquent non supporté par l'ensemble analytique $\{f_1 = \ldots = f_p = 0\}$, comme cela s'avère être le cas lorsque les f_j définissent une intersection complète dans U.

Il existe cependant un artifice pour pallier partiellement à cette difficulté, celui qui consiste à "régulariser" la multiplication des courants positifs présente dans (6) via les techniques de prolongement analytique: il se trouve que l'application

$$\lambda \mapsto \Big(\frac{1}{2i\pi}\Big)^d \bigg(\overline{\partial}\Big[\|f\|^{2\lambda}\partial\|f\|^2\Big]\bigg)^d\,,$$

considérée comme une application définie dans $\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,\lambda >> 1\}$ et à valeurs dans l'espace des $(n-d, n-d)$ courants sur U, se prolonge en une application méromorphe à tout le plan complexe, application dont les pôles, lorsque les courants sont testés contre des formes de support dans un compact K de U, sont de la forme $\gamma - l$, $l \in \mathbb{N}$, où γ appartient à un sous-ensemble fini $\Gamma_K\ \mathbb{Q}^-$ (on remarque en particulier que cette application ne présente pas de pôle à l'origine et que sa valeur en $\lambda = 0$ est bien définie). De fait, on peut écrire

$$\Big(\frac{1}{2i\pi}\Big)^d \bigg(\overline{\partial}\Big[\|f\|^{2\lambda}\partial\|f\|^2\Big]\bigg)^d = \|f\|^{2d\lambda}[dd^c \log \|f\|^2]^d + \lambda A_\lambda^{(d)}[f;\zeta]$$

et l'on vérifie que la contribution à la valeur en $\lambda = 0$ de cette fonction de

$$\lambda \mapsto \lambda A_\lambda^{(d)}[f;\zeta]$$

correspond à l'action d'un (d,d) courant positif fermé, qui lui, n'est plus diffus, mais supporté par l'ensemble analytique $\{f_1 = \ldots = f_p = 0\}$. Ce courant positif fermé (que nous noterons $[V(f)]_d^{0,1}$, on comprendra pourquoi ces indices supérieurs un peu plus loin) se factorise aussi à l'aide de courants résiduels

$$[V(f)]_d^{0,1} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_d \le p} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_d} \wedge (\cdot) \\ f_{i_1}, ..., f_{i_d} \\ f_1, ..., f_p \end{bmatrix}^{0,1}, \tag{7}$$

où, si $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leq p$ et si φ désigne une $(n, n-d)$-forme test dans U,

$$\mathrm{Res} \begin{bmatrix} \varphi \\ f_{i_1}, ..., f_{i_d} \\ f_1, ..., f_p \end{bmatrix}^{\underline{0}, \underline{1}} := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} (d-1)!}{(2i\pi\epsilon)^d} \int_{<s,f>=\epsilon} \Omega(s; \{i_1, ..., i_d\}) \wedge \varphi \, .$$

En s'inspirant de la souplesse des formules de Bochner-Martinelli dans le cas intersection complète (souplesse qui autorise le changement de section s), on peut élargir la gamme des courants positifs fermés possibles en introduisant, d'une part un p-uplet d'entiers positif ou nuls $q_1, ..., q_p$, d'autre part, un système de fonctions réelles analytiques $\rho_1^2, \ldots, \rho_p^2$ strictement positives dans U. On remplace alors la section "de base" s par la section

$$s^{\underline{q}, \underline{\rho}} = (\rho_1^2 |f_1|^{2q_1} \overline{f_1}, \ldots, , \rho_p^2 |f_p|^{2q_p} \overline{f_p}) \, .$$

Ceci génère la construction de courants résiduels

$$\mathrm{Res} \begin{bmatrix} \varphi \\ f_{i_1}, ..., f_{i_d} \\ f_1, ..., f_p \end{bmatrix}^{\underline{q}, \underline{\rho}}$$

et de courants positifs fermés (toujours supportés par l'ensemble analytique $\{f_1 = \ldots = f_p = 0\}$), définis cette fois par

$$[V(f)]_d^{\underline{q}, \underline{\rho}} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leq p} \Big(\prod_{l=1}^{d} (q_{i_l} + 1) \Big) \mathrm{Res} \begin{bmatrix} df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_d} \wedge (\cdot) \\ f_{i_1}, ..., f_{i_d} \\ f_1, ..., f_p \end{bmatrix}^{\underline{q}, \underline{\rho}} , \qquad (8)$$

On voit facilement que si

$$||f||^2_{\underline{q}, \underline{\rho}} := \sum_{j=1}^{p} \rho_j^2 ||f_j|^{2(q_j+1)} = < s^{\underline{q}, \underline{\rho}}, f > ,$$

et

$$\left(\frac{1}{2i\pi} \right)^d \left(\overline{\partial} \Big[||f||^{2\lambda}_{\underline{q}, \underline{\rho}} \partial ||f||^2_{\underline{q}, \underline{\rho}} \Big] \right)^d = ||f||^{2d\lambda}_{\underline{q}, \underline{\rho}} [dd^c \log ||f||^2_{\underline{q}, \underline{\rho}}]^d + \lambda \Big[A_\lambda^{(d)} [f; \zeta] \Big]_{\underline{q}, \underline{\rho}} ,$$

alors

$$\Bigg[\lambda [A_\lambda^{(d)} [f; \zeta]]_{\underline{q}, \underline{\rho}} \Bigg]_{\lambda = 0} = [V(f)]_d^{\underline{q}, \underline{\rho}} .$$

Si le jeu avec la pondération "géométrique " $\underline{\rho}$ s'avère nécessaire lorsque l'on envisage de passer du cadre semi-local au cadre global (les ρ_j correspondront alors à des métriques sur les fibrés en droites correspondant aux diviseurs), le jeu avec la pondération "algébrique" $\underline{q}$ tient au fait que le choix de cette pondération peut gouverner l'annulation des courants résiduels qui y sont attachés. Nous illustrerons cette remarque par un exemple, sur lequel repose ultérieurement l'idée d'utiliser ce mécanisme pour accéder au courant d'intégration dans le cas non-intersection complète:

Supposons $p > d$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n-d}(U)$. Supposons aussi que $f_1, ..., f_d$ définissent au voisinage du support de φ une intersection complète, sur laquelle $f_{d+1}, ..., f_p$ s'annulent, et prenons $q_1 = \ldots = q_d = 0$ et $q_{d+1} = \ldots = q_p = dM$, où M est assez grand pour que $(f_1, ..., f_d)$ et $(f_1, ..., f_d, f_{d+1}^{M+1}, ..., f_p^{M+1})$ aient <u>même clôture intégrale</u> au voisinage de tout point du support de la forme-test φ. On vérifie alors qu'indépendamment du choix de la pondération géométrique ρ, on a

$$\{i_1, ..., i_d\} \neq \{1, ..., d\} \Longrightarrow \operatorname{Res} \begin{bmatrix} \varphi \\ f_{i_1}, ..., f_{i_d} \\ f_1, ..., f_p \end{bmatrix}^{\underline{q}, \underline{\rho}} = 0\,.$$

Dans ce cas particulier, on voit donc que

$$< [V(f)]_d^{\underline{q},\underline{\rho}}, \varphi >=< [Z(f_1, ..., f_d)], \varphi > \ .$$

C'est cette remarque, jointe à un argument basé sur l'unicité du prolongement des courants positifs fermés, que nous allons utiliser pour montrer qu'un "bon" choix de la pondération algébrique peut conduire à une méthode d'accès au courant d'intégration sur $\{f_1 = \ldots = f_p = 0\}$.

4.b. *<u>Le point de vue global dans l'espace projectif</u>* <u>$\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$.</u>

Considérons p polynômes homogènes $F_1, ..., F_p$ de degrés respectifs $D_1, ..., D_p$, définissant un cycle algébrique de codimension pure égale à d. Pour construire une approche au courant d'intégration sur ce cycle (en respectant les multiplicités), on procède comme suit:

• Dans le cas où les F_j définissent une variété discrète, on choisit une forme linéaire

$$\mathcal{L}_0(X) := \beta_{00} X_0 + \cdots + \beta_{n0} X_n$$

ne s'annulant pas aux points du support dy cycle $Z(F_1, ..., F_p)$. Si $D := \max_j \deg F_j$, on considère ensuite la liste de $n + p$ polynômes homogènes définis par

$$\begin{aligned} Q_j(X) &= \sum_{k=1}^{p} \beta_{jk} \mathcal{L}_0(X)^{D-D_j} F_j(X)\,, \quad j = 1, ..., n\,, \\ Q_{n+j}(X) &= F_j(X)\,, \quad j = 1, ..., d\,. \end{aligned}$$

où $\beta_{j1}, ...\beta_{jp}$, sont des coefficients complexes génériques. On introduit les pondérations algébriques

$$q_1 = \ldots = q_n = 0\,,\ q_{n+1} = \cdots = q_{n+d} = nD^n$$

et les pondérations géométriques

$$\rho_1 = \cdots = \rho_n = \|z\|^{-D}\,,\ \rho_{n+j} = \|z\|^{-D_j(nD^n+1)}\,,\ j = 1, ..., d\,.$$

L'application

$$\lambda \mapsto I_\lambda =$$

$$\frac{\lambda(n-1)!}{(2i\pi)^n} \|Q\|_{q,\rho}^{2(\lambda-n-1)} \overline{\partial} \|Q\|_{q,\rho}^2 \wedge \partial \|Q\|_{q,\rho}^2 \wedge \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{n-1} \\ 1\leq j_r \leq n+p}} \bigwedge_{l=1}^{n-1} \overline{\partial}(\rho_{j_l} \overline{Q_{j_l}}^{q_{j_l}+1}) \wedge \partial(\rho_{j_l} Q_{j_l}{}^{q_{j_l}+1}),$$

où

$$\|Q\|_{q,\rho}^2 = \sum_{j=1}^{n+p} \rho_j^2 |Q_j|^{2(q_j+1)}$$

est une fonction méromorphe de $\mathbb{C}$ dans $'\mathcal{D}^{(n,n)}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))$ de valeur en $\lambda = 0$ précisément le courant d'intégration sur $Z(F_1, ..., F_p)$ (avec multiplicités). Il faut souligner ici que le calcul analytique du nombre de Lelong (dans le cas discret, mais un phénomène tout à fait semblable se produit dans le cas général) ne fait pas la différence entre un idéal et sa clôture intégrale. Les travaux d'Angéniol et M. Lejeune-Jalabert [Ang-Lej] autour de la relation entre les notions de liaison et de résidu exploitent des idées similaires. L'analyse permet d'appréhenter l'idéal de Chow d'un cycle et non son idéal.

• Dans le cas où $d < n$, la méthode est sensiblement similaire; on choisit la forme linéaire $\mathcal{L}_0$ de manière à ce qu'elle intersecte proprement toute composante connexe de l'ensemble des points réguliers du support du cycle $Z(F_1, ..., F_p)$. On choisit des points génériques z_τ sur chacune de ces composantes connexes de telle manière que si les β_{jk}, $j = 1, ..., p$, $k = 1, ..., d$, les polynômes

$$Q_j := \sum_{k=1}^{p} \beta_{jk} \mathcal{L}_0(X)^{D-D_j} F_j(X)$$

définissent ensemblistement le support du cycle $Z(F_1, ..., F_p)$ au voisinage de x_τ et mieux, définissent du point de vue algébrique, un idéal ayant même multiplicité que celle de la composante primaire de $(F_1, ..., F_p)_{x_\tau}$ qui lui correspond. La construction de l'accès au courant d'intégration se fait de manière analogue. On invoque le fait que l'action du (d, d) courant positif ainsi construit coïncide avec celle du courant d'intégration sur $Z(F_1, ..., F_p)$ (avec multiplicités) au voisinage de tout point régulier du support de ce cycle pour conclure.

5. Construction de courants de Green.

Une fois réalisée l'approximation du courant d'intégration par une fonction du type

$$\lambda \mapsto I_\lambda$$

à valeurs dans l'espace des (d, d) courants dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, la construction d'un courant de Green se fait en "multipliant" cette fonction par une réalisation de la forme de Lévine attachée à la diagonale dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Si on note

$$\widetilde{L}_\mu(z, w) := \int_{\beta \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})} \pi^*[L_\mu](z, w, \beta)$$

cette approche, la fonction

$$\lambda \mapsto \mathbf{G}_\lambda \,,$$

où

$$< \mathbf{G}_\lambda, \varphi >:= \int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})\times\mathbf{P}^n(\mathbb{C})} I_{\lambda^2}(y) \wedge L_\lambda(x,y) \wedge \varphi \,, \quad \varphi \in \mathcal{D}^{n-d+1,n-d+1}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))$$

réalise par exemple une fonction méromorphe, holomorphe à l'origine, et dont la valeur en 0 fournit un courant de Green, solution de

$$dd^c\mathbf{G} + [Z(F_1,...,F_d)] = \deg Z(F_1,...,F_d)\, \omega^d \,,$$

et régulier hors du support du cycle $Z(F_1,...,F_p)$.

Références.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), 903-1027.

[BY1] C. A. Berenstein et A. Yger, Green currents and analytic continuation, J. Analyse. Math, 75 (1998), 1-50.

[BY2] C. A. Berenstein et A. Yger, Analytic residue theory in the non-complete intersection case, *preprint* **math.CV/9905051**.

[Fa] G. Faltings, Diophantine approximation on Abelian varieties, Ann. of Math. (2) 133 (1991), 549-576.

[GK] P. Griffiths et J. King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, Acta Math. 130, 1973, 145-220.

[Lej] M. Lejeune-Jalabert, Liaison et résidu, Algebraic geometry (La Rábida, 1981), 233-240, Lecture Notes in Math., 961, Springer, Berlin-New York, 1982.

[Lev] H. Levine, A theorem on holomorphic mappings into complex projective space, Ann. of Math. 71 (1960), 529-535.

[PTY] M. Passare, A. Tsikh, A. Yger, Residue currents of the Bochner-Martinelli type, *to appear* in Publicaciones Mat. (1999).