# Corrigé du DM2

## Problème 1.

Soit $(X,\ \mathcal{T},\ \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ (espace de probabilités).
Soit $f \in L^1(X,\ \mathcal{T},\ \mu),\ f \geq 0$.

**1-** Montrer que $\ln f$ est mesurable.
**Solution.**
Comme $\ln x$ est continue pour $x > 0$ elle est borélienne et $\ln f$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.

On supposera désormais que $\ln f \in L^1(\mu)$.
**2-** Montrer que $\displaystyle\int_X \ln f\, d\mu \leq \ln \int_X f\, d\mu$. (On pourra remarquer que $\forall t > 0,\ \ln t \leq t-1$ et commencer par supposer que $\|f\|_1 = 1$.)
**Solution.**
Comme $\forall t > 0,\ \ln t \leq t - 1$ et que $\ln f \in L^1(\mu)$ et que $f - 1$ aussi car $1 \in L^1(\mu)$ puisque $\mu(X) = 1 < \infty$, on a $\ln f \leq f - 1$ et donc
$$\int_X \ln f\, d\mu \leq \int_X (f-1)\, d\mu = \|f\|_1 - 1 = 0 = \ln \|f\|_1\,,$$
si $\|f\|_1 = 1$. Pour le cas général on pose $g := \frac{f}{\|f\|_1} \Longrightarrow g \in L^1(\mu),\ \|g\|_1 = 1$ et on peut appliquer à $g$ l'inégalité ci-dessus :
$$\int_X \ln g\, d\mu \leq 0 \Longrightarrow \int_X \ln \frac{f}{\|f\|_1}\, d\mu = \int_X \ln f\, d\mu - \int_X \ln \|f\|_1\, d\mu \leq 0,$$
mais $\displaystyle\int_X \ln \|f\|_1\, d\mu = \ln \|f\|_1 \int_X d\mu = \ln \|f\|_1$ d'où finalement $\displaystyle\int_X \ln f\, d\mu \leq \ln \|f\|_1 = \ln \int_X f\, d\mu$.

**3-** Montrer qu'il y a égalité dans **2-** si et seulement si $f = Cste > 0$.
**Solution.**
On se ramène au cas $\|f\|_1 = 1$ comme ci-dessus d'où, s'il y a égalité $\displaystyle\int_X \ln f\, d\mu = 0$. Mais si $E := \{x \in X\ t.q.\ \ln f(x) < f(x) - 1\}$ est tel que $\mu(E) > 0$, alors
$$\int_X \ln f\, d\mu = \int_E \ln f\, d\mu + \int_{X\setminus E} \ln f\, d\mu < \int_E (f-1)\, d\mu + \int_{X\setminus E} (f-1)\, d\mu < 0.$$
Donc $\mu(E) = 0$ et donc $\ln f(x) = f(x) - 1,\ p.p.$ Mais $\ln t = t - 1 \Longrightarrow t = 1$ donc $f(x) = 1\ p.p.$ donc la classe de $f$ est bien constante et égale à 1. Dans le cas général il vient donc $f = \|f\|_1$.

**4-** Montrer que $\dfrac{e^{pa} - 1}{p} \longrightarrow a$ quand $p \longrightarrow 0$.
**Solution.**
Comme $e^0 = 1$ on a $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow 0} \frac{e^{pa} - e^0}{p} = (e^{pa})'_{p=0} = a(e^{pa})_{p=0} = a$.

**5-** Soit $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs tels que $p_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. Montrer que

$\dfrac{f^{p_n}-1}{p_n} \longrightarrow \ln f$ en décroissant quand $n \longrightarrow \infty$.

**Solution.**

On pose $\phi_t(p) := \dfrac{t^p-1}{p} = \dfrac{\exp(p\ln t)-1}{p}$. Cette fonction est définie pour $p>0$ et sa dérivée est

$$\phi_t'(p) = \frac{\ln t \exp(p\ln t)p - \exp(p\ln t)+1}{p^2} = \frac{t^p \ln t^p - t^p + 1}{p^2}.$$

Avec $u := t^p$ il vient $\phi_t'(p) = \dfrac{1}{p^2}(u\ln u - u + 1)$. Mais la fonction $\psi(u) := u\ln u - u + 1$ est minimale quand sa dérivée est nulle $\psi'(u) = \ln u = 0 \Longrightarrow u = 1$ et là on a $\psi(1) = 0$ qui est bien le seul minimum possible. Donc on a que $\phi_t'(p) \geq 0$ et la fonction $\phi_t(p)$ est donc croissante de $p$. Ainsi avec $t = f(x)$ on a que

$\dfrac{f^p-1}{p}$ est une fonction croissante de $p$. Donc si $p_n \searrow 0$ la suite $\dfrac{f^{p_n}-1}{p_n}$ est décroissante. Elle converge vers $\ln f$ par la question précédente avec $a = \ln f$.

**6-** Montrer que $\forall p < 1,\ f^p \leq 1 + f$. En déduire que si $p_n \longrightarrow 0$, $\int_X f^{p_n}\, d\mu \longrightarrow 1$.

**Solution.**

Si $f \leq 1,\ f^p \leq 1 \Longrightarrow f^p \leq 1 + f$ car $f \geq 0$.

Si $f > 1,\ f^p < f$ car $p < 1$, donc $f^p \leq f + 1$. On a toujours $\forall p < 1,\ f^p \leq 1 + f$.

On sait que si $t > 0,\ t^{p_n} \longrightarrow 1$ quand $p_n \longrightarrow 0$ donc sur $f(x) > 0,\ f(x)^{p_n} \longrightarrow 1$Posons $E := \{x \in X\ t.q.\ f(x) > 0\}$, comme $\ln f$ est intégrable alors nécessairement $E^c$ est négligeable donc $\mu(E) = 1$. Ainsi $f^{p_n} \longrightarrow 1,\ p.p.$ quand $n \longrightarrow \infty$.

D'autre part $|f^{p_n}| = f^{p_n} \leq 1 + f \in L^1(\mu)$ on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\int_X f^{p_n}\, d\mu \longrightarrow \int_X d\mu = 1.$$

**7-** Déduire de **5-** que $\left|\ln \displaystyle\int_X f^{p_n}\, d\mu - \int_X (f^{p_n} - 1)\, d\mu\right| \longrightarrow 0$ si $p_n \longrightarrow 0$. (On pourra poser $a_n := \displaystyle\int_X f^{p_n}\, d\mu$).

**Solution.**

Avec $a_n := \displaystyle\int_X f^{p_n}\, d\mu$ on a par **5-** que $a_n \longrightarrow 1$ et comme $|\ln t - t + 1| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow 1$ on a le résultat.

**8-** Déduire de **4-** et de **5-** que $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow 0} \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{1/p} = \exp \int_X \ln f\, d\mu$.

**Solution.**

Comme la fonction exponentielle est continue, il suffit de montrer que

$$\lim_{p\longrightarrow 0} \frac{1}{p} \ln\left(\int_X f^p\, d\mu\right) = \int_X \ln f\, d\mu.$$

Donc il suffit de voir que pour toute suite $p_n \longrightarrow 0$ on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{p_n} \ln\left(\int_X f^{p_n}\, d\mu\right) = \int_X \ln f\, d\mu.$$

Supposons que $p_n \longrightarrow 0$ en décroissant, alors on a par **5-** que

$$t_n := \frac{f^{p_n}-1}{p_n} \searrow \ln f$$

donc

$$\ln f \leq t_n \leq t_0 = \frac{f^{p_0}-1}{p_0} \Longrightarrow |t_n| \leq |\ln f| + |t_0| \in L^1(\mu),$$

et on peut utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\int_X t_n \, d\mu \longrightarrow \int_X \ln f \, d\mu. \tag{0.1}$$

D'autre part on a

$$\int_X f^p \, d\mu = \int_X (f^p - 1) \, d\mu + 1 = p \int_X \frac{f^p - 1}{p} \, d\mu + 1,$$

d'où, avec $p = p_n$, $\displaystyle\int_X f^{p_n} \, d\mu = 1 + p_n \int_X t_n \, d\mu$.

Ainsi

$$\frac{1}{p_n} \ln \left( \int_X f^{p_n} \, d\mu \right) = \frac{1}{p_n} \ln \left( 1 + p_n \int_X t_n \, d\mu \right) = \int_X t_n \, d\mu + \epsilon \left( p_n ( \int_X t_n \, d\mu)^2 \right),$$

car grâce à **6-** $p_n \displaystyle\int_X t_n \, d\mu \longrightarrow 0$ et on développe le logarithme à l'ordre 2.

D'où $\displaystyle\frac{1}{p_n} \ln \left( \int_X f^{p_n} \, d\mu \right) = \int_X t_n \, d\mu + p_n \epsilon \left( ( \int_X t_n \, d\mu)^2 \right) \longrightarrow \int_X \ln f \, d\mu,$

par (0.1) et le résultat dans ce cas.

Si maintenant $p_n \longrightarrow 0$ de manière quelconque, on pose $r_n := \inf_{k \leq n} p_k$, $s_n := \sup_{k \geq n} p_k$, alors on a que $r_n$, $s_n$ sont deux suites décroissantes vers 0 et $r_n \leq p_n \leq s_n$. Ainsi

$$\frac{f^{s_n}-1}{s_n} - \leq \frac{f^{p_n}-1}{p_n} \leq \frac{f^{r_n}-1}{r_n},$$

et le résultat.

**Problème 2.**

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f$ une fonction mesurable à valeurs positives. On pose, pour $\lambda > 0$, $F(\lambda) := \mu(f > \lambda) = \mu(\{x \in X \ t.q. \ f(x) > \lambda\})$.

**1-** Montrer que $F$ est une fonction décroissante et continue à droite.

**Solution.**

Comme $\{x \in X \ t.q. \ f(x) > \lambda\} \subset \{x \in X \ t.q. \ f(x) > \lambda'\}$ si $\lambda' \leq \lambda$ et qu'une mesure est une fonction monotone on a que $F$ est décroissante.

Il suffit de montrer que si $\lambda_n \searrow \lambda$ alors $F(\lambda_n) \longrightarrow F(\lambda)$. Posons

$A_n := \{x \in X \ t.q. \ f(x) > \lambda_n\}$, $A := \{x \in X \ t.q. \ f(x) > \lambda\}$ alors $A_n \nearrow A$ et comme une mesure est sequentiellement monotone continue, il vient

$\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$ et le résultat.

**2-** Montrer que si $f \in L^1(\mu)$ il existe une constante $A > 0$ telle que $F(\lambda) \leq \dfrac{A}{\lambda}$.

**Solution.**

C'est du cours : on pose $A_\lambda := \{x \in X \ t.q. \ f(x) > \lambda\}$, alors

$$\|f\|_1 = \int_X f\,d\mu \geq \int_{A_\lambda} f\,d\mu \geq \lambda \int_{A_\lambda} d\mu = \lambda\mu(A_\lambda) = \lambda F(\lambda),$$

la première inégalité car $f \geq 0$ et la deuxième car $f \geq \lambda$ sur $A_\lambda$.

**3-** Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, tendant vers $f$ quand $n \longrightarrow \infty$. Montrer que, si $F_n(\lambda) := \mu(f_n > \lambda)$, alors $F_n$ converge en croissant vers $F$.

**Solution.**

On a $f_n \nearrow f$ donc $\{f_n > \lambda\} \nearrow \{f > \lambda\}$ et comme $\mu$ est sequentiellement monotone continue, on a que $F_n \longrightarrow F$.

**4-** Calculer $F$ lorsque $f$ est une fonction caractéristique, puis lorsque $f$ est une fonction simple que l'on prendra sous la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ et les $A_j$ disjoints.

Montrer que dans ce cas $F = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\mathbb{1}_{[0,\ \alpha_j[}$.

**Solution.**

Soit $f = \mathbb{1}_A$, alors si $\lambda < 1$ on a $\{f > \lambda\} = A \Longrightarrow F(\lambda) = \mu(A)$. Si $\lambda \geq 1$, $\{f > \lambda\} = \emptyset \Longrightarrow F(\lambda) = \mu(\emptyset) = 0$.

On a donc $F(\lambda) = \mu(A)\mathbb{1}_{[0,1[}(\lambda)$, ces deux fonctions prenant les mêmes valeurs aux mêmes points.

Si $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ avec les hypothèses ci-dessus, alors on constate encore que $F(\lambda)$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\mathbb{1}_{[0,\ \alpha_j[}(\lambda)$ prennent les mêmes valeurs au mêmes points donc sont égales.

**5-** Soit $\Phi$ une fonction positive définie sur $[0,\ +\infty[$, dérivable et à dérivée positive, telle que $\Phi(0) = 0$. On se propose de montrer que, quelle que soit la fonction mesurable $f$ à valeurs positives,

$$\int_X \Phi(f)\,d\mu = \int_0^\infty F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda,$$

où $\Phi'$ est la dérivée de $\Phi$ et $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

**a)** Montrer que si $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ et les $A_j$ disjoints alors on a bien $\displaystyle\int_X \Phi(f)\,d\mu = \int_0^\infty F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda$.

**Solution.**

On a vu que dans ce cas $F = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\mathbb{1}_{[0,\ \alpha_j[}$ d'où

$$\int_0^\infty F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,\ \alpha_j[}(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda,$$

d'où $\displaystyle\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,\ \alpha_j[}(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda = \int_0^{\alpha_j} \Phi'(\lambda)\,d\lambda = \Phi(\alpha_j) - \Phi(0) = \Phi(\alpha_j)$

et donc $\displaystyle\int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\Phi(\alpha_j)$.

D'autre part comme la dérivée de $\Phi$ est positive, $\Phi$ est croissante d'où

$$\Phi(f) = \sum_{j=1}^{n} \Phi(\alpha_j)\mathbb{1}_{A_j} \Longrightarrow \int_X \Phi(f)\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} \Phi(\alpha_j)\mu(A_j).$$

Ainsi on a bien $\displaystyle\int_X \Phi(f)\,d\mu = \int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda$ dans cas.

**b)** Montrer que $\displaystyle\int_X \Phi(f)\,d\mu = \int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda$ pour toute fonction $f$ en utilisant la question **3-**.

**Solution.**

Soit $f$ une fonction mesurable positive. Il existe une suite de fonctions simples mesurables positives $f_n$ telle que $f_n \nearrow f$. On peut écrire chaque $f_n$ comme

$$f_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^n \mathbb{1}_{A_j^n},$$

avec toujours les mêmes hypothèses que ci-dessus. On en déduit donc que

$$\forall n,\ \int_X \Phi(f_n)\,d\mu = \int_0^{\infty} F_n(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda. \tag{0.2}$$

Mais comme $\Phi$ est croissante et continue, la suite de fonctions $\Phi(f_n)$ est aussi croissante et converge vers $\Phi(f)$, et $F_n$ est aussi une suite croissante qui converge vers $F$ par la question **3-**.
On peut donc appliquer le théorème de Beppo Lévi au deux membres de (0.2) et on a

$$\int_X \Phi(f_n)\,d\mu \longrightarrow \int_X \Phi(f)\,d\mu,\ \int_0^{\infty} F_n(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda \longrightarrow \int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda,$$

d'où $\displaystyle\int_X \Phi(f)\,d\mu = \int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\,d\lambda$.