Semestre 4, Année 2005-2006 SESSION 2

UE : MAT401

Date : Mercredi 6 Septembre 2006, 14h-17h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Problème (séries, intégrales impropres)

a. *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante (tendant vers $+\infty$) de nombres réels et f une fonction de classe C^1 sur $[x_1, +\infty[$. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. Montrer que pour tout $x \geq x_1$, l'ensemble*

$$\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n \leq x\}$$

est un ensemble fini non vide. Montrer ensuite que l'on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n\leq x\}} u_n f(x_n) &= \Big(\sum_{\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n\leq x\}} u_n\Big) f(x) \\ &\quad - \int_{x_1}^{x} \Big(\sum_{\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n\leq t\}} u_n\Big) f'(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

<u>Indication :</u> *on pensera à découper l'intégrale figurant au second membre en*

$$\int_{x_1}^{x_2} u_1 f'(t)\, dt + \int_{x_2}^{x_3} (u_1+u_2) f'(t)\, dt + \cdots$$

(grâce à la relation de Chasles), puis à utiliser la méthode d'Abel.

Soit $x \geq 1$. Comme la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ à partir de x_1, l'ensemble des entiers n tels que $x_n > x$ est non vide ; comme de plus la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est supposée croissante et que $x \geq x_1$, il existe un unique cran $N = N(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_N \leq x$ et que $x_{N+1} > x$ (il suffit de définir $N+1$ comme le plus petit élément de l'ensemble des entiers n tels que x_n soit strictement supérieurs à x). On a donc

$$\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n \leq x\} = \{x_1, ..., x_N\}$$

et l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n \leq x\}$ est donc bien fini (et non vide).

On a, en suivant l'indication :

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_N} \Big(\sum_{\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n\le t\}} u_n \Big) f'(t)\,dt \\
= & \int_{x_1}^{x_2} u_1 f'(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_3} (u_1+u_2)\, f'(t)\,dt + \cdots \\
& \qquad + \cdots + \int_{x_N}^{x} (u_1+\cdots+u_N)\, f'(t)\,dt \\
= & \; u_1\Big(f(x_2)-f(x_1)\Big) + (u_1+u_2)\Big(f(x_3)-f(x_2)\Big) + \cdots \\
& \qquad + \cdots + (u_1+\cdots+u_N)\Big(f(x)-f(x_N)\Big)\,.
\end{aligned}$$

La dernière somme ci-dessus se réorganise suivant la méthode d'Abel en

$$\begin{aligned}
& u_1\Big(f(x)-f(x_N)+f(x_N)-f(x_{N-1})+\cdots+f(x_2)-f(x_1)\Big) \\
& \quad +u_2\Big(f(x)-f(x_N)+f(x_N)-f(x_{N-1})+\cdots+f(x_3)-f(x_2)\Big) \\
& \quad +\cdots+u_N(f(x)-f(x_N)) \\
= & \; f(x)(u_1+\cdots+u_N) - \Big(u_1 f(x_1)+\cdots+u_N f(x_N)\Big) \\
= & \; \Big(\sum_{\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n\le x\}} u_n \Big)\, f(x) - \sum_{\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n\le x\}} u_n f(x_n)\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule voulue, une fois que l'on a fait passer les termes d'un membre à l'autre.

b. *On se donne maintenant un nombre complexe z. En prenant $x_n = n$, $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(x) = x^{-z}$ pour tout $x \geq 1$, déduire du* **a**, *pour tout $x \geq 1$, la formule*

$$\begin{aligned}
\sum_{\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } n\le x\}} \frac{1}{n^z} &= \frac{E(x)}{x^z} + z\int_1^x \frac{E(t)}{t^{z+1}}\,dt \\
&= z\int_1^x t^{-z}\,dt + \frac{E(x)}{x^z} + z\int_1^x \frac{E(t)-t}{t^{z+1}}\,dt\,,
\end{aligned}$$

où $E(t)$ désigne, pour un nombre réel t, le plus grand nombre entier inférieur ou égal à t.

<u>Indication</u> : on vérifiera d'abord pour cela qu'avec ici la définition proposée dans cette question pour x_n et u_n, on a, pour tout nombre réel $t \geq 1$,

$$E(t) = \sum_{\{x_n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n\le t\}} u_n\,.$$

Si $t \geq 1$ et que $N = E(t)$ désigne la partie entière de t, on peut bien écrire

$$E(t) = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$$

(N fois) et l'on a donc bien

$$E(t) = \sum_{\{x_n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n \leq t\}} u_n$$

car l'ensemble

$$\{x_n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_n \leq t\}$$

est un ensemble à N éléments (car ici $x_n = n$).
En appliquant la formule établie au **a** avec $x_n = n$, $u_n = 1$ et $f(t) = t^{-z}$, on a $f'(t) = -zt^{-(z+1)}$; on obtient donc

$$\begin{aligned}\sum_{\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \leq x\}} \frac{1}{n^z} &= \Big(\sum_{\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \leq x\}} 1\Big) x^{-z} \\ &\quad + z \int_1^x \Big(\sum_{\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \leq t\}} 1\Big) t^{-(z+1)}\, dt \\ &= \frac{E(x)}{x^z} + z \int_1^x \frac{E(t)}{t^{z+1}}\, dt\end{aligned}$$

en utilisant le résultat établi au préalable concernant $E(t)$. La seconde égalité s'obtient en écrivant

$$z \int_1^x \frac{E(t)}{t^{z+1}}\, dt = z \int_1^x \frac{E(t) - t}{t^{z+1}}\, dt + z \int_1^x t^{-z}\, dt\,.$$

c. *On suppose que* $\operatorname{Re} z > 0$. *Montrer que* $|E(t) - t| \leq 1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et en déduire que l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^{z+1}}\, dt$$

est une intégrale impropre absolument convergente.
Comme

$$E(t) \leq t < E(t) + 1$$

par définition de $E(t)$, on a bien $0 \leq t - E(t) \leq 1$ et donc $|E(t) - t| \leq 1$. Comme l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^{z+1}|} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\operatorname{Re} z + 1}}$$

est convergente comme intégrale de Riemann lorsque $\mathrm{Re}\, z > 0$, il en est de même, du fait du principe de comparaison, pour l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{|E(t) - t|}{|t^{z+1}|}\, dt$$

puisque

$$\forall\, t \geq 1\,,\ \ \frac{|E(t) - t|}{|t^{z+1}|} \leq \frac{1}{|t^{z+1}|} = \frac{1}{t^{\mathrm{Re}\, z + 1}}\,.$$

d. *Montrer que, si* $\mathrm{Re}\, z > 1$*, la série numérique* $[1/n^z]_{n\geq 1}$ *est convergente et que la fonction*

$$z \in \{z \in \mathbb{C}, ;\ \mathrm{Re}\, z > 1\} \longmapsto \zeta(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

est continue dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\, z > 1\}$.

Si $\mathrm{Re}\, z \geq 1 + \epsilon$ (avec $\epsilon > 0$) on a

$$|n^{-z}| = n^{-\mathrm{Re}\, z} \leq n^{-1-\epsilon}\,.$$

Comme la série $[n^{-1-\epsilon}]_{n\geq 1}$ converge de par le critère de Riemann, la série de fonctions (de z) $[n^{-z}]_{n\geq 1}$ converge normalement (donc uniformément) dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, z \geq 1 + \epsilon\}$. Sa somme définit donc une fonction continue dans ce demi-plan. Comme $\epsilon > 0$ était arbitraire et que la continuité est une propriété locale, la série $[n^{-z}]_{n\geq 1}$ est bien convergente pour tout z de partie réelle strictement supérieure à 1 et sa somme définit bien une fonction continue dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\, z > 1\}$.

e. *En utilisant la formule établie au* **b** *et le résultat établi au* **c***, établir la formule :*

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\, z > 1\}\,,\ \zeta(z) = \frac{z}{z-1} + z\int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^{z+1}}\, dt\,;$$

en déduire

$$\zeta(x) \simeq \frac{1}{x-1}$$

lorsque x *(supposé ici réel) tend vers* 1 *par valeurs strictement supérieures.*

On a, pour tout $x \geq 1$,

$$z\int_1^x t^{-z}\, dt = z\Big[\frac{t^{1-z}}{1-z}\Big]_1^x = z\frac{x^{1-z}}{1-z} + \frac{z}{z-1}\,;$$

si $\operatorname{Re} z > 1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(z\frac{x^{1-z}}{1-z}\right)=0$$

car

$$|x^{1-z}|=\frac{1}{x^{\operatorname{Re} z-1}}\,,$$

quantité tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Toujours lorsque x tend vers $+\infty$, on a, puisque l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^{z+1}}\,dt$$

est absolument convergente (résultat établi au **c**),

$$\lim_{x\to+\infty}\left(z\int_1^x\frac{E(t)-t}{t^{z+1}}\,dt\right)=z\int_1^{\infty}\frac{E(t)-t}{t^{z+1}}\,dt\,.$$

Enfin, comme

$$\left|\frac{E(x)}{x^z}\right|\le\frac{x}{|x^z|}=\frac{1}{x^{\operatorname{Re} z-1}}$$

et que $\operatorname{Re} z > 1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x^z}=0\,.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans la dernière égalité établie au **b**, on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sum_{\{n\in\mathbb{N}^*\ \text{tel que}\ n\le x\}}\frac{1}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\zeta(z)\\ &= \frac{z}{z-1}+z\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^{z+1}}\,dt\,.\end{aligned}$$

Pour $x\ge 1$, on a

$$\left|x\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^{x+1}}\,dt\right|\le x\int_1^{+\infty}\frac{|E(t)-t|}{t^2}\,dt\le\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=1\,.$$

Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, on a

$$\frac{x}{x-1}\sim\frac{1}{x-1}\,;$$

comme de plus

$$\left|x\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^{x+1}}\,dt\right|\le 1$$

lorsque $x \geq 1$, on a bien, en utilisant la formule établie en première partie de cette question,

$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$$

lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

f. *Rappeler comment se majore le reste au cran n d'une série alternée (en fonction du terme général de cette série) ; en utilisant ce résultat, montrer que la série de fonctions (de la variable $t \in]0, +\infty[$)*

$$[(-1)^{n-1} n^{-t}]_{n\geq 1}$$

converge uniformément sur tout intervalle $[\epsilon, +\infty[$ avec $\epsilon > 0$; en déduire que la fonction

$$t \in]0, +\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}$$

est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

Le reste au cran N de la série alternée de terme général $[(-1)^{n-1}a_n]_{n\geq 1}$ est majoré en valeur absolue par $|a_{n+1}|$. Dans le cas qui nous intéresse ici, le reste $r_N(t)$ au cran N de la série numérique alternée $[(-1)^{n-1}n^{-t}]_{n\geq 1}$ (t étant un réel strictement positif fixé) est majoré par

$$|r_N(t)| \leq \frac{1}{(N+1)^t}.$$

Pour tout $t \geq \epsilon$, on a donc

$$|r_N(t)| \leq \frac{1}{(N+1)^\epsilon}.$$

Comme cette majoration du reste $r_N(t)$ est indépendante de t (pourvu que $t \in [\epsilon, +\infty[$) et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, la convergence de la suite de fonctions de terme général

$$t \longmapsto u_N(t) := \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}$$

vers

$$t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}$$

est uniforme (en t) sur $[\epsilon, +\infty[$. La fonction

$$t \in [\epsilon, +\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}$$

est donc une fonction continue sur $[\epsilon, +\infty[$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues, à savoir les fonctions

$$t \in [\epsilon, +\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}\,, \ \ N \in \mathbb{N}^*\,.$$

Comme $\epsilon > 0$ est ici arbitraire et que la continuité est une propriété locale, la fonction

$$t \in]0, +\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}$$

est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

g. *Vérifier, pour tout $t > 1$, la relation*

$$\zeta(t) \times (1 - 2^{1-t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}$$

(on pensera à écrire $2^{1-t}\zeta(t)$ comme la somme de la série $[2(2p)^{-t}]_{p\geq 1}$). En admettant la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2\,,$$

retrouver l'équivalent de $\zeta(x)$ (lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures) établi au **e**.

On remarque que pour tout $t > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} - 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}\,,$$

ce qui s'écrit encore

$$\zeta(t)(1 - 2^{1-t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}\,,$$

ce qui donc bien la formule voulue et s'écrit aussi

$$\zeta(t) = \frac{1}{1 - 2^{1-t}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}\,.$$

On a, au voisinage de $u = 0$ (à droite, on prendra en fait $u = x - 1 > 0$),

$$1 - 2^{-u} = 1 - e^{-u\log 2} = u\log 2 + u\epsilon(u) \sim u\log 2\,;$$

d'autre part, d'après la continuité de la fonction

$$t \in]0, +\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^t}$$

(établie au **f**) et la formule ici admise

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

on a

$$\lim_{x \to 1} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \Big) = \log 2 .$$

On a donc (en mettant toutes ces informations ensemble), lorsque x tend vers 1 par valeur supérieures,

$$\zeta(x) = \frac{1}{1 - 2^{-(x-1)}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \sim \frac{1}{(x-1)\log 2} \times \log 2 = \frac{1}{x-1},$$

ce qui redonne bien le résultat établi au **e**.

Exercice 1 (séries de Fourier)

a. *Tracer le graphe de la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall\, t \in [-\pi, \pi[\,,\ f(t) = t^2$$

(on représentera le graphe au dessus de l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$). Cette fonction est elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$?

On trace le graphe sur $[-\pi, \pi]$, puis on le reproduit par périodicité sur les intervalles $[-3\pi, -\pi[$ et $]\pi, 3\pi]$ pour l'avoir sur $[-3\pi, 3\pi]$ (voir la figure 1). Sur $[\pi, \pi]$, la fonction est définie par $f(t) = t^2$ et son graphe est donc une parabole.

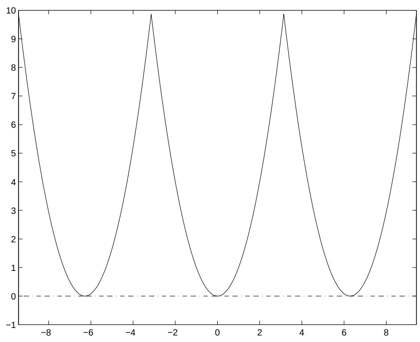

Fig. 1 – Graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$

Comme les valeurs en $-\pi$ et π sont égales, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Par contre, la dérivée à droite en $t=-\pi$ vaut -2π (car la fonction $t \longmapsto t^2$ se dérive en $t \longmapsto 2t$) tandis que la dérivée à gauche en π (donc aussi en $-\pi$ par périodicité) vaut 2π. Le graphe de la fonction f présente des points anguleux aux points $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est clairement dérivable en dehors de ces points ; par contre, elle admet une dérivée à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

b. *Calculer*

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^4\, dt$$

et déduire de ce calcul (en vous référant à un résultat du cours que vous énoncerez soigneusement) la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\,.$$

On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \Big[\frac{t^5}{5}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi^5/5\,.$$

D'après la formule de Plancherel (applicable ici car la fonction f est une fonction continue 2π-périodique), on a

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{2\pi^5}{5}\,.$$

On a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{\pi^4}{5}\,,$$

où

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

désigne, pour $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier d'indice n. Comme la fonction f est à valeurs réelles et paire, on a $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour $n > 0$ et il vient donc

$$|c_0(f)|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{\pi^4}{5}\,. \qquad (*)$$

On a ici

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi}\Big[t^3/3\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi^2/3\,.$$

Pour $n > 0$, il vient, *via* une intégration par parties itérée :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[t^2\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t\frac{e^{-int}}{-in}\,dt\Big) \\
&= \frac{1}{in\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,dt \\
&= \frac{1}{in\pi}\Big(\Big[t\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{-in}\,dt\Big) \\
&= \frac{2e^{-in\pi}}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

On a donc, en reportant dans la formule $(*)$ établie ci-dessus,

$$\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^4} = \frac{\pi^4}{5}\,,$$

d'où il résulte

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}(1/5 - 1/9) = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

c. *Etablir (en la justifiant par un résultat précis du cours), pour tout* $t \in [-\pi, \pi]$*, la formule*

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{n^2}\,;$$

en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Comme la fonction f admet en tout point une dérivée à droite et à gauche (et est de plus continue), le théorème de Dirichlet s'applique et permet d'affirmer que, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}
f(t) = t^2 &= \lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f)e^{int}\Big) \\
&= c_0(f) + 2\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N} c_n(f)\cos(nt)\Big) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\,.
\end{aligned}$$

En prenant en particulier $t = \pi$, on trouve

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

On en déduit donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}(1 - 1/3) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Exercice 2 (séries de Fourier et intégrales)

On se donne une fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2, à valeurs réelles, telle que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0\,.$$

On suppose que

$$\forall\, t \in [0, 2\pi]\,,\ |f(t)| \geq |f''(t)|\,.$$

a. *Si $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c_n(f''))_{n\in\mathbb{Z}}$ désignent les suites de coefficients de Fourier complexes de f et f'', montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$|c_n(f'')|^2 = n^4\,|c_n(f)|^2\,.$$

Par définition des coefficients de Fourier complexes d'une fonction continue par morceaux et 2π-périodique, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f'') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,dt\,.$$

Deux intégrations par parties successives donnent :

$$\begin{aligned}
c_n(f'') &= \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[-inf'(t)e^{-int}\Big]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt\Big)\\
&= \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt\\
&= \frac{in}{2\pi}\Big(\Big[-inf(t)e^{-int}\Big]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\Big)\\
&= -\frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\\
&= -n^2c_n(f)\,.
\end{aligned}$$

En prenant les carrés des modules, on trouve bien la relation voulue.
b. *En utilisant la formule de Plancherel, montrer que*

$$\forall n \geq 2\,,\ c_{\pm n}(f) = 0\,;$$

en déduire l'existence de $r > 0$ *et* $\varphi \in [0, 2\pi[$ *tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t) = r\cos(t - \varphi)\,.$$

On a, d'après la formule de Plancherel (pour f'' et f),

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f''(t)|^2\,dt \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt\,.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse faite sur f, on a (en utilisant la monotonie de l'opération de prise d'intégrale)

$$\int_0^{2\pi} |f''(t)|^2\,dt \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt\,.$$

Cette inégalité se répercute donc en l'inégalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\,,$$

ou encore, si l'on utilise le résultat établi au **a** :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\,.$$

Cette dernière inégalité se lit aussi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (n^4 - 1)|c_n(f)|^2 \leq 0\,.$$

Comme $c_0(f) = 0$ par hypothèses, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} (n^4 - 1)|c_n(f)|^2 \leq 0\,.$$

Mais tous les termes de la somme ci-dessus sont positifs ou nuls ! L'inégalité n'est donc possible que s'ils sont tous nuls, en particulier

$$\forall n \in \mathbb{Z}\,,\ |n| \geq 2 \Longrightarrow c_n(f) = 0$$

car $n^4 - 1 > 0$ dès que $|n| \geq 2$.

D'après le théorème de Dirichlet (applicable ici puisque f est supposée de classe C^1), on a

$$f(t) = \lim_{N \to +\infty} \Big(\sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f) e^{int} \Big)\,;$$

dans notre cas particulier ici, puisque tous les coefficients de Fourier $c_n(f)$ aveec $n| \geq 2$ ainsi que $n = 0$ sont nuls, on a

$$f(t) = c_{-1}(f) e^{-it} + c_1(f) e^{it} = a \cos t + b \sin t\,,$$

si l'on convient de poser

$$\begin{array}{rcl} a & = & c_{-1}(f) + c_1(f) \\ b & = & i(c_1(f) - c_{-1}(f))\,. \end{array}$$

Comme la fonction f est à valeurs réelles, ces nombres a et b sont des nombres réels et l'on peut représenter le nombre complexe $a + ib$ sous la forme polaire

$$a + ib = re^{i\varphi}\,,$$

où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ est une détermination de l'argument (modulo 2π). On a donc $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ et ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t) = r(\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \sin t) = r \cos(t - \varphi)\,.$$

c (hors barème). *En reprenant la trame du raisonnement développé au* **a** *et au* **b**, *montrer que la seule fonction 2π périodique, à valeurs réelles, de classe C^1, qui vérifie à la fois l'inégalité $|f(t)| \geq |f'(t)|$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et la condition $c_0(f) = 0$, est la fonction identiquement nulle.*

On remarque (toujours en utilisant une intégration par parties) que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f') = -inc_n(f)$$

(une seule intégration par parties suffit ici). L'hypothèse selon laquelle $|f'(t)| \leq |f(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, combinée avec la monotonie de l'intégrale, implique

$$\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt\,.$$

En utilisant la formule de Plancherel, il vient donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

(on applique le même raisonnement qu'au **b**). On a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\,,$$

ou encore

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (n^2-1)|c_n(f)|^2 \leq 0$$

et, puisque $c_0(f) = 0$ par hypothèses,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} (n^2-1)|c_n(f)|^2 \leq 0\,.$$

Mais tous les termes de la somme ci-dessus sont positifs ou nuls ! L'inégalité n'est donc possible que s'ils sont tous nuls, ce qui implique en particulier $c_n(f) = 0$ lorsque $|n| \geq 2$ (car $n^2 - 1 > 0$ si $|n| \geq 2$). Exactement comme au **b**, on en déduit l'existence de $r > 0$ et de $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t) = r\cos(t-\varphi)\,.$$

Mais alors

$$f'(t) = -r\sin(t-\varphi)$$

et on sait bien que l'inégalité

$$|\sin(t-\varphi)| \leq |\cos(t-\varphi)|$$

est impossible sur $\mathbb{R}$ (prendre par exemple $t = \varphi + \pi/2$) ; l'hypothèse selon laquelle $|f'(t)| \leq |f(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ implique donc $r = 0$ et f est bien la fonction identiquement nulle.