ANNÉE 2003-2004	SESSION DE JUIN 2004
GU : SM411	**UE** : SM411
Date : 18 Mai 2004	Durée : 3 h.

CORRIGÉ

Problème.

1. Comme X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P((X=k)\cap(Y=n-k))$$

(formule des probabilités totales) ; du fait de l'indépendance de X et Y, on a

$$P((X=k)\cap(Y=n-k)) = P(X=k)\times P(Y=n-k)\,,$$

d'où la formule

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\,.$$

2. Si f est une fonction de X telle que $f(X)$ soit d'espérance finie, on a

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)P(X=k)\,;$$

si $f_t\ : x \longmapsto e^{itx}$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1 < \infty\,,$$

ce qui montre que $f(X)$ a bien une espérance, qui vaut

$$E[e^{itX}] := \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itk}\,.$$

3. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si X est une variable aléatoire définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et telle que

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Dans ce cas

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda+\lambda e^{it}} = \exp(-\lambda(1-\cos t - i\sin t))\,.$$

4. Une variable aléatoire Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et prenant ses valeurs dans $\{0, ..., N\}$ suit une loi binomiale de paramètre $1/2$ si et seulement si

$$P(Y = k) = \frac{N!}{k!(N-k)!}\,(1/2)^k \times (1/2)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\,(1/2)^N\,.$$

Le lancer (N fois consécutives, les lancers étant supposés indépendants) d'une pièce non truquée constitue une épreuve faisant apparaitre une telle variable aléatoire ($Y =$ le nombre de lancers où l'on a obtenu pile). On a

$$\varphi_Y(t) = 2^{-N} \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} e^{ikt} = \left(\frac{1+e^{it}}{2}\right)^N$$

(d'après la formule du binôme de Newton).

5. Si X et Y sont indépendantes, les variables e^{itX} et e^{itY} le sont et l'on a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, :

$$\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX} \times e^{itY}) = E(e^{itX}) \times E(e^{itY}) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)\,.$$

La formule demandée ici résulte donc des résultats établis au **3** et **4** concernant le calcul des fonctions caractéristiques de X et Y.

6. Si X et Y sont deux variables de Poisson de paramètres λ indépendantes, la fonction caractéristique de $X + Y$ vaut

$$t \to \Big[\exp(-\lambda(1 - \cos t - i \sin t))\Big]^2 = \exp(-2\lambda(1 - \cos t - i \sin t))\,.$$

Si $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $3\lambda/2$, on a

$$\varphi_{X+Y}(t) = \exp(-3\lambda/2(1 - \cos t - i \sin t))\,,$$

ce qui prouve que X et Y ne sauraient ici être indépendantes car $3/2 \neq 2$. On a, si $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y = k \,|\, X = l) &= \frac{P((X = l) \cap (Y = k))}{P(Y = k)} = P(X = l \,|\, Y = k)\frac{P(Y = k)}{P(X = l)} \\ &= r_{l,k} \lambda^{k-l} \frac{l!}{k!} \end{aligned}$$

car $P(X = l) = e^{-\lambda}\lambda^l/l!$ et $P(Y = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ par hypothèses ici. On a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} (P((X = k) \cap (Y = n - k))$$

d'après la formule des probabilités totales. On a donc

$$e^{-3\lambda/2}\frac{(3/2)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} P(Y = n-k \mid X = k)P(X = k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n} r_{n-k,k}\frac{\lambda^k}{k!}\,;$$

ceci est la formule voulue, en multipliant les deux membres par $e^{\lambda}n!$.

Exercice 1

a. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$P(|X-m| \geq \epsilon\sigma) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\,.$$

b. La moyenne de X vaut

$$E[X] = \int_0^{+\infty} t f_X(t)dt = 10\int_0^{+\infty} e^{-10t}t dt\,;$$

en intégrant par parties, on trouve

$$E[X] = \Big[-te^{-10t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-10t}dt = \frac{1}{10}\,.$$

La variance de X vaut

$$E[X^2] - (E[X])^2 = \int_0^{+\infty} t^2 f_X(t)dt - \frac{1}{100} = \frac{1}{50}\,.$$

Par parties encore

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^2 f_X(t)dt &= \Big[-t^2e^{-10t}\Big]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-10t}dt \\ &= 2\Big(\Big[-t(e^{-10t}/10)\Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{10}\int_0^{+\infty} e^{-10t}dt\Big) = \frac{2}{100}\,.\end{aligned}$$

La variance de X vaut donc $1/50 - 1/100 = 1/100$ et la racine carrée de cette variance (qui est précisément l'écart-type) vaut donc $\sigma = 1/10$.
On a

$$P(|X-.1| < \alpha) = P(.1-\alpha < X < .1+\alpha) = 10\int_{\max(0,.1-\alpha)}^{.1+\alpha} e^{-10t}dt\,.$$

Deux cas sont à considérer ici :

- si $\alpha \geq .1$, on a

$$P(|X-.1| < \alpha) = 10\int_0^{.1+\alpha} e^{-10t}dt = 1 - e^{-10(.1+\alpha)} = 1 - e^{-1-10\alpha}\,;$$

- si $\alpha < .1$, on a

$$P(|X-.1|<\alpha) = 10\int_{.1-\alpha}^{.1+\alpha} e^{-10t}dt = \frac{e^{10\alpha}-e^{-10\alpha}}{e}\,.$$

L'estimation déduite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est

$$P(|X-.1|<\alpha) = 1 - P(|X-.1|\geq\alpha) \geq 1 - \frac{1}{10\alpha^2}\,;$$

pour tout $\alpha \geq .1$, on a donc

$$e^{-1-10\alpha} \leq \frac{1}{10\alpha^2}\,;$$

pour $0<\alpha<.1$, on a, par comparaison du résultat exact pour $P(|X-.1|<\alpha)$ avec la minoration déduite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$1 - \frac{e^{10\alpha}-e^{-10\alpha}}{e} \leq \frac{1}{10\alpha^2}\,.$$

Exercice 2

a. On a

$$\int_\gamma x dy = 2\pi\int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2u)}{2}du = \pi\,.$$

b. En différentiant dans D l'identité $P^2+Q^2\equiv 1$ par rapport à x et y, il vient, identiquement dans le disque D,

$$\begin{aligned} P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x} &\equiv 0 \\ P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y} &\equiv 0\,. \end{aligned}$$

Comme $(P(x,y),Q(x,y))$ est, lorsque $(x,y)\in D$, une solution non nulle du système de Cramer

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}X + \frac{\partial Q}{\partial x}Y &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}X + \frac{\partial Q}{\partial y}Y &= 0 \end{aligned}$$

(puisque $P(x,y)^2+Q(x,y)^2=1$), le déterminant de ce système (qui vaut précisément $\partial(P,Q)/\partial(x,y)$ au point (x,y)) est nul. Le Jacobien de F est donc identiquement nul dans D.

c. La formule de Green-Riemann nous donne

$$\begin{aligned}
\int_\gamma P dQ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[P\frac{\partial Q}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[P\frac{\partial Q}{\partial x}\right]\right) dxdy \\
&= \iint_D P(x,y)\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}\right) dxdy \\
&\qquad + \iint_D \frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}\, dxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après le **b** et le lemme de Schwarz (qui assure que les dérivées secondes croisées sont égales car P et Q sont C^2).

d. Si F existait, on aurait

$$\int_\gamma P dQ = \int_\gamma x dy = \pi$$

car $(P,Q) = (x,y)$ sur le support de γ, tandis que

$$\int_\gamma P dQ = 0$$

d'après le **c** (puisque $F(x,y)$ serait un point du cercle unité pour tout (x,y) dans le disque D). Ceci est donc impossible (car conduisant à l'absurdité $0 = \pi$), par conséquent, il ne saurait exister de telle F.

Exercice 3

La longueur de l'arc géométrique ainsi paramétré vaut

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t + \cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^1 \sin t \sqrt{1+\cos^2 t}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+\sin^2 t}\; d(\sin t) = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx = I.
\end{aligned}$$

La valeur numérique de I s'obtient en faisant le changement de variable $x = \sinh t$; on trouve

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\operatorname{argsinh}(1)} \sqrt{1+\sinh^2 t}\, \cosh t\, dt = \int_0^{\operatorname{argsinh}(1)} \cosh^2 t\, dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{argsinh}(1)} (2 + e^{-2t} + e^{2t})\, dt\,.
\end{aligned}$$

On a donc

$$I = \frac{1}{4}\Big(\sinh(2\operatorname{argsinh}(1)) + 2\operatorname{argsinh}(1)\Big)\,;$$

or

$$\cosh(\operatorname{argsinh}(1)) = \sqrt{2}\,,$$

donc $\operatorname{argsinh}(1) = \log(1+\sqrt{2})$, ce qui donne

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{2})^{-2}}{2} + 2\log(1+\sqrt{2})\right).$$