COURS MIAS 301

Devoir Surveillé 2, Jeudi 7 Novembre 2002

Durée: 1 heure 20 mn

TEXTE (*en italiques*) + **CORRIGÉ** (en roman)

ALGÈBRE

Exercice 1. *Soit T un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n.*

a. *Rappeler la relation entre le rang de l'endomorphisme T (c'est-à-dire la dimension du sous-espace $\mathrm{Im}\, T$) et la dimension du noyau de T.*

Si T est un $\mathbf{K}$-homomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie dans un autre (F), l'image $\mathrm{Im}\, T$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F et l'on a la formule du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}\, T) + \dim(\mathrm{Im}\, T) = \dim E\,;$$

ceci est en particulier vrai si T est un $\mathbf{K}$-endomorphisme de E.

b. *On suppose que T est diagonalisable et que le polynôme caractéristique de T admet $\lambda = 0$ comme racine avec la multiplicité μ ; calculer le rang de T en fonction de n et de μ.*

Si T est diagonalisable, le sous-espace propre correspondant à une valeur propre λ a pour dimension la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de T (le fait que ceci soit vrai pour toutes les valeurs propres est d'ailleurs, étant donné un opérateur trigonalisable T, une condition nécessaire et suffisante pour que T soit diagonalisable). Ici, concernant la valeur propre $\lambda = 0$, le sous-espace propre correspondant est le noyau $\mathrm{Ker}\, T$ de T et l'on a donc, si T est diagonalisable,

$$\dim(\mathrm{Ker}\, T) = \mu\,;$$

du fait de la formule du rang rappelée au **a.**, on a donc

$$\mathrm{rang}\, T = \dim(\mathrm{Im}\, T) = n - \dim(\mathrm{Ker}\, T) = n - \mu\,.$$

c. *On suppose toujours que T est diagonalisable et de rang $r < n$; quelle est la multiplicité de $\lambda = 0$ comme racine du polynôme minimal de T ?*

Si T est de rang $r < n$, $\lambda = 0$ est valeur propre de T (car $\dim(\mathrm{Ker}\, T) > 0$), donc racine simple du polynôme minimal de T (puisque, toujours pour un opérateur trigonalisable, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit diagonalisable est que son polynôme minimal s'écrive

$$Q_T(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)\,,$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les valeurs propres (distinctes) de T).

Exercice 2.

a. *Calculer les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et dire pourquoi (sans chercher à la diagonaliser) cette matrice est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$). Décrire le sous-espace propre correspondant à la seule valeur propre réelle de cette matrice.

Le polynôme caractéristique du $\mathbb{C}$-endomorphisme T_A représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est

$$P_{T_A}(X) \;=\; \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 - (X+2)^3 \,.$$

Comme l'équation $z^3 = 1$ a, dans le plan complexe, trois racines distinctes :

$$z_1 = 1\,, \quad z_2 = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\,, \quad z_3 = e^{-2i\pi/3} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\,,$$

le polynôme caractéristique de T_A admet, dans $\mathbb{C}$, les trois racines distinctes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - 2 = -1\,, \\ \lambda_2 &= -2 + e^{2i\pi/3} = \frac{-5+\sqrt{3}\,i}{2} \\ \lambda_3 &= -2 - e^{-2i\pi/3} = \frac{-5-\sqrt{3}\,i}{2}\,. \end{aligned}$$

L'endomorphisme T_A, donc la matrice A, est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisque toutes les trois racines (dans $\mathbb{C}$) du polynôme caractéristique (qui est de degré 3) sont distinctes : en effet le polynôme minimal de T_A est forçément dans ce cas :

$$Q_{T_A}(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)\,.$$

Le sous-espace propre correspondant à chacune des valeurs propres est de dimension 1 (puisque les trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des racines simples de P_{T_A}) ; c'est en particulier vrai pour le sous-espace propre correspondant à la seule valeur propre réelle, qui est ici -1. La matrice de $T + \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}$ dans la base canonique est

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

le sous-espace propre correspondant à la valeur propre -1 est donc l'ensemble des vecteurs $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ tels que

$$x = y = z ;$$

c'est la droite vectorielle $\mathbb{C}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

On remarquera aussi (pour la suite) que toutes les valeurs propres de la matrice A sont dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z < 0\}$.

b. *Soient $t \to f_1(t)$, $t \to f_2(t)$, $t \to f_3(t)$ trois fonctions dérivables et de dérivées continues sur $]0, +\infty[$ telles que :*

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= -2f_1(t) + f_2(t) \\ f_2'(t) &= -2f_2(t) + f_3(t) \\ f_3'(t) &= f_1(t) - 2f_3(t) \end{aligned}$$

sur $]0, +\infty[$. Montrer que l'on a

$$\lim_{t \to \infty} |f_j(t)| = 0$$

pour $j = 1, 2, 3$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{C}^3$ constituée de vecteurs propres pour la matrice A (il en existe car cette matrice est diagonalisable), telle que

$$A = [\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}] \bullet \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \bullet [\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}]^{-1} ,$$

où $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{C}^3$. Si l'on introduit les fonctions g_1, g_2, g_3 de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = [\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}]^{-1} \bullet \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} .$$

Compte-tenu du fait que f_1, f_2, f_3 satisfont le système différentiel

$$\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix} = A \bullet \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} ,$$

on a

$$\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} .$$

On a donc

$$g_j(t) = \gamma_j e^{\lambda_j t} , \; j = 1, 2, 3 ,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des constantes complexes. Ceci se voit par intégration d'équations différentielles du premier ordre sans second membre : en effet, la solution générale de l'équation différentielle $y'(t) = \lambda y(t)$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est $y(t) = \gamma e^{\lambda t}$, où γ est une constante complexe arbitraire. Comme $\mathrm{Re}\, \lambda_j < 0$ pour $j = 1, 2, 3$, on a

$$\lim_{t \to \infty} |g_j(t)| = 0$$

pour $j = 1, 2, 3$. On a donc, puisque

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ g_f(t) \end{pmatrix} = [\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}] \bullet \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} ,$$

$$\lim_{t \to \infty} |f_j(t)| = 0$$

pour $j = 1, 2, 3$.

ANALYSE

Question de cours. *Comment est défini le produit de Cauchy de deux séries numériques $[u_n]_{n \geq 0}$ et $[v_n]_{n \geq 0}$? Ce produit est-il commutatif ? L'absolue convergence des deux séries $[u_n]_{n \geq 0}$ et $[v_n]_{n \geq 0}$ permet-elle de conclure à la convergence de la série $[w_n]_{n \geq 0}$ obtenue comme produit de Cauchy des deux séries numériques $[u_n]_{n \geq 0}$ et $[v_n]_{n \geq 0}$? Si oui, que vaut alors la somme de la série $[w_n]_{n \geq 0}$ en fonction des sommes des séries $[u_n]_{n \geq 0}$ et $[v_n]_{n \geq 0}$?*

Le produit de Cauchy des deux séries $[u_n]_{n \geq 0}$ et $(v_n]_{n \geq 0}$ est la série $[w_n]_{n \geq 0}$ où

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} .$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k'=0}^{n} v_{k'} u_{n-k'}$$

(via le changement d'indices $k = n - k'$), le produit de Cauchy est commutatif. Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes $[u_n]_{n \geq 0}$ et

$[v_n]_{n\geq 0}$ est une série absolument convergente (théorème du cours) de somme le produit des sommes des séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$.

Exercice 1. *On considère la série*

$$\Big[\frac{(-1)^n}{2n+1}\Big]_{n\geq 0}.$$

a. *Quel résultat précis du cours assure la convergence de cette série ?*

Comme la suite

$$n \to \frac{1}{2n+1}$$

tend vers 0 en décroissant, le critère des séries alternées assure la convergence de cette série.

b. *On admet que la somme de cette série vaut $\pi/4$; à partir de quelle valeur de n est-on sûr que*

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| < \frac{10^{-6}}{2} \ ?$$

Le reste R_n d'une série alternée est majoré en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé. Ici, on a donc

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}.$$

Pour réaliser la condition voulue, il suffit donc que

$$\frac{1}{2n+3} < \frac{10^{-6}}{2},$$

soit

$$2n+3 > 2\times 10^6,$$

ou encore

$$n > 10^6 - 3/2 \ ;$$

ceci est vrai dès que

$$n \geq 999998.$$

Exercice 2. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique telle qu'il existe une constante $C>0$ avec*

$$\forall n \geq 1, \quad |u_n| \leq C.$$

a. *Quel résultat précis du cours assure la convergence de la série*

$$\Big[\frac{u_n - u_{n+1}}{\sqrt{n}}\Big]_{n\geq 1} \ ?$$

On expliquera pourquoi ce résultat s'applique.

Les sommes partielles de la série de terme général $u_n - u_{n+1}$, $n \geq 1$, sont bornées car

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |u_1 - u_{n+1}| \leq |u_1| + |u_{n+1}| \leq 2C\,;$$

comme la suite $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, on peut appliquer le critère d'Abel qui assure la convergence de la série $[(u_n - u_{n+1})/\sqrt{n}]_{n\geq 1}$.

b. *Quelle est la nature de la série*

$$\Big[\frac{1 + u_n - u_{n+1}}{\sqrt{n}}\Big]_{n\geq 1} \ ?$$

La série $[1/\sqrt{n}]_{n\geq 1}$ est une série de Riemann divergente (car du type $[n^{-x}]_{n\geq 1}$ avec $x = 1/2 < 1$. La série de terme général $[(u_n - u_{n+1})/\sqrt{n}]_{n\geq 1}$ est, elle convergente ; la série de terme général

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{u_n - u_{n+1}}{\sqrt{n}}$$

est donc divergente (comme somme d'une série divergente et d'une série convergente).