CHAPITRE 10

Equations différentielles

Equations différentielles

ordre 1

$$\boxed{F\ (t\ ,\ y(t)\ ,\ y'(t)) = 0\ ,\quad t \in I}$$

Temps

position

vitesse

$$\boxed{F(t\ ,\ y(t)\ ,\ y'(t)\ ,\ y''(t)) = 0\ ,\quad t \in I}$$

ordre 2

accélération

Equations linéaires d'ordre 1

$$\boxed{y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \quad , \quad t \in I}$$

(a et b fonctions continues de I dans ℝ ou C)

+

$$\boxed{\text{Condition « initiale » :} \quad y(t_0) = y_0}$$

($t_0 \in I$, $y_0 \in$ ℝ ou C)

L'approche numérique : méthode d'Euler

- Se fixer des conditions initiales t_0, y_0
- Choisir un pas de temps τ
- Choisir T = « durée de vie » tel que $[t_0, T]$ soit inclus dans I

approximation de $y(t_0 + n\tau)$

$$u_{\tau,0} = y_0$$

$$u_{\tau,n+1} = u_{\tau,n} + \tau \left(a(t_0 + n\tau)\, u_{\tau,n} + b(t_0 + n\tau) \right)$$

(tant que $t_0 + n\tau \leq T$)

Le théorème de Cauchy

<u>Hypothèses :</u>

- I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

- a et b fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ (ou C)

- $t_0 \in I$ $y_0 \in \mathbb{R}$ ou C (données initiales)

<u>Conclusion :</u>

Il existe une <u>unique</u> fonction

y : I → $\mathbb{R}$ (ou C) telle que :

$$\boxed{\begin{array}{l} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \quad \text{pour } t \text{ dans } I \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{(condition initiale)} \end{array}}$$

Le théorème de Cauchy(bis)

Hypothèses :

- I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- a et b fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ (ou C)
- $t_0 \in I$ $y_0 \in \mathbb{R}$ ou C (données initiales)

Conclusion :

Il existe une unique courbe intégrale de l'équation différentielle

$$\boxed{y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \quad \text{pour } t \text{ dans } I}$$

passant par le point (t_0, y_0).

L'attaque du problème étape 1 :

résolution de l'équation homogène

$$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \Longleftrightarrow Y' = 0$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$

Y = constante

fonction auxiliaire : Y(t) = y(t) exp (-A (t))

1 degré de liberté

$$y(t) = C \exp(A(t))$$

L'attaque du problème étape 2 :

recherche d'une solution particulière de l'équation complète

$$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$$

variation de la constante

$$y(t) = C(t) \exp(A(t))$$

$$(C'(t) + a(t)\, C(t)) \exp(A(t)) = a(t)\, C(t) \exp(A(t)) + b(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$C'(t) = b(t) \exp(-A(t))$$

$$C(t) = C + \int_{t_0}^{t} b(u) \exp(-A(u))\, du$$

$$y_{part}(t) = \exp(A(t)) \times \int_{t_0}^{t} b(u) \exp(-A(u))\, du$$

Le bilan final

Solution de l'équation $y'(t)=a(t)\, y(t)+ b(t)$

avec condition initiale : $y(t_0) = y_0$

$$y(t)=\exp(A(t)) \left(z_0 + \int_{t_0}^{t} b(u) \exp(-A(u))\, du \right)$$

$$z_0=y_0 \exp(-A(t_0))=y_0$$

Condition initiale : $y(t_0) = y_0$

Les équations de J. Bernouilli

$$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\, [y(t)]^{\alpha}$$

$$(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\})$$

Condition initiale : $y(t_0) = y_0 > 0$

Fonction auxiliaire : $z(t) = [y(t)]^{1-\alpha}$

$$z'(t) = (1-\alpha)\, a(t)\, z(t) + (1-\alpha)\, b(t)$$

$$z(t_0) = y_0^{1-\alpha}$$

Equations linéaires du second ordre

$$y''(t) = a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) + c(t)\ ,\quad t \in I$$

(a,b,c fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ ou C)

+

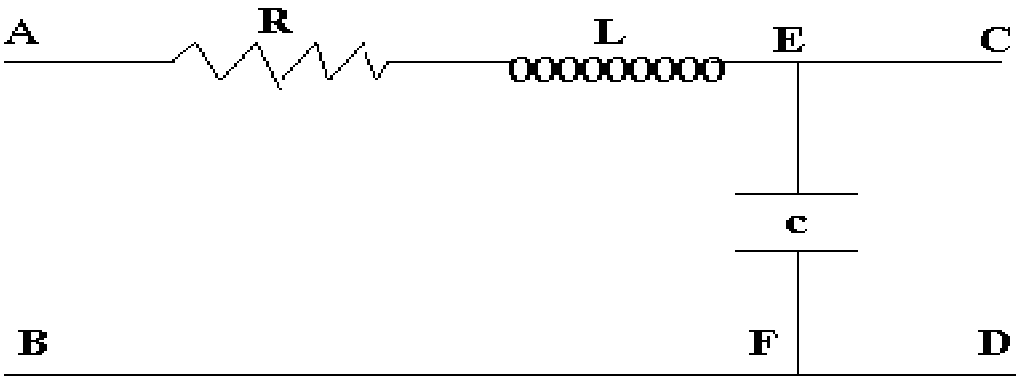
Conditions « initiales » : $y(t_0) = y_0$

$y'(t_0)=v_0$

($t_0 \in I$, y_0 et $v_0 \in \mathbb{R}$ ou C)

Un exemple de motivation : une cellule electronique d'ordre 2

i →



$(U_A - U_C)(t) = R\, i(t) + L\, di/dt$

$c\,(U_C - U_D)'(t) = i(t)$

$y(t) = U_c - U_D\,(t)$

$f(t) = U_A - U_B\,(t)$

$$Lc\, y''(t) + R\, c\, y'(t) + y(t) = f(t)$$

L'approche numérique : méthode d'Euler

approximation de $y(t_0 + n\tau)$

- **Se fixer des conditions initiales t_0 , y_0 , v_0**
- **Choisir un pas de temps τ**

- **Choisir T = « durée de vie » tel que $[t_0, T]$ soit inclus dans I**

$$u_{\tau,0} = y_0 \;,\; u_{\tau,1} = y_0 + \tau\, v_0$$

$$u_{\tau,n+2} = u_{\tau,n} \left(\tau^2\, b(t_0+n\,\tau) - \tau\, a\,(t_0+n\tau) - 1\right) + u_{\tau,n+1} \left(\tau\;\, a(t_0 + n\;\tau) \;+ 2\right) + \tau^2\;\; c(t_0+n\tau)$$

(tant que $t_0 + n\;\tau \leq T$)

Le théorème de Cauchy

Hypothèses :

- I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- a , b , c fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ (ou C)
- $t_0 \in I$ y_0 , $v_0 \in \mathbb{R}$ ou C (données initiales)

Conclusion :

Il existe une <u>unique</u> fonction

$y : I \to \mathbb{R}$ (ou C) telle que :

$y''(t) = a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) + c(t)$ pour t dans I et $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = v_0$ (conditions initiales)

Le théorème de Cauchy (bis)

Hypothèses :

- I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- a , b , c fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ (ou C)
- $t_0 \in I$ $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ ou C (données initiales)

Conclusion (bis)

Il existe une unique courbe intégrale de l'équation différentielle

$$\boxed{y''(t) = a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) + c(t)}$$

passant par le point (t_0, y_0) et ayant au point (t_0, y_0) une tangente de pente v_0

Le cas à coefficients constants

Hypothèses :

- I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- a , b $\in \mathbb{R}$ ou C , c fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ (ou C)
- $t_0 \in I$ y_0, $v_0 \in \mathbb{R}$ ou C (données initiales)

Conclusion :

Il existe une unique fonction
y : I → $\mathbb{R}$ (ou C) telle que :

$$y''(t) = a\, y'(t) + b\, y(t) + c(t) \quad \text{pour } t \text{ dans } I$$

$$y(t_0) = y_0 \;,\; y'(t_0) = v_0 \text{ (conditions initiales)}$$

Le cas à coefficients constants (bis)

Hypothèses :

- I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- a , b $\in \mathbb{R}$ ou C , c fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ (ou C)
- $t_0 \in I$ $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ ou C (données initiales)

Conclusion :

Il existe une unique courbe intégrale de l'équation différentielle

$$\boxed{y''(t) = a\, y'(t) + b\, y(t) + c(t)}$$

passant par le point (t_0,y_0) et ayant au point (t_0,y_0) une tangente de pente v_0

L'attaque du problème étape 1 : résolution de l'équation homogène

$$y''(t) - a\, y'(t) - b\, y(t) = 0 \,, \quad t \in \mathbb{R}$$

$a, b \in \mathbb{C}$

$y(t) = \exp(\overset{?}{w}\, t)$ solution ?

$\Longleftrightarrow$ $w^2 - a\, w - b = 0$

$X^2 - a\, X - b = 0$ (équation caractéristique)

$= (X - w_1)(X - w_2)$

$\boxed{\text{cas 1} : a^2 + 4\, b \text{ non nul}}$ w_1 et w_2 distinctes

$$\boxed{y = C_1 \exp(w_1 t) + C_2 \exp(w_2\, t) \quad \text{OK}}$$

$\boxed{\text{cas 2} : a^2 + 4\, b = 0}$ $w_1 = w_2 = w$

$$\boxed{y = C_1 \exp(w\, t) + C_2\, t \exp(w\, t) \quad \text{OK}}$$

Le cas complexe :

a , b complexes

conditions initiales (y_0 , $v_0 \in \mathbb{C}$)

cas 1 : $a^2 + 4\,b$ non nul

w_1 et w_2 <u>distinctes</u>

$$y = C_1 \underbrace{\exp(w_1 t)}_{y_1(t)} + C_2 \underbrace{\exp(w_2\, t)}_{y_2(t)} \quad \text{OK}$$

cas 2 : $a^2 + 4\,b = 0$

$w_1 = w_2 = w$

$$y = C_1 \underbrace{\exp(w\, t)}_{y_1(t)} + C_2 \underbrace{t \exp(w\, t)}_{y_2(t)} \quad \text{OK}$$

$$C_1\, y_1(t_0) + C_2\, y_2(t_0) = y_0$$

$$C_1\, y'_1(t_0) + C_2\, y'_2(t_0) = v_0$$

système de Cramer $\Rightarrow$ **solution (C_1,C_2) unique !!**

$\lambda = a/2 < 0$: oscillations amorties

$\lambda = a/2 > 0$: oscillations amplifiées

L'attaque du problème :

l'équation homogène dans le cas réel

(1) $a, b \in \mathbb{R}$

$$y''(t) - a\, y'(t) - b\, y(t) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$X^2 - a X - b = 0 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

cas 1: $a^2 + 4b > 0$

λ_1 et λ_2 réels <u>distincts</u>

$\inf(\lambda_j) > 0$: « explosion »

$$y = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) \quad \text{OK}$$

$\sup(\lambda_j) < 0$: « extinction »

cas 2: $a^2 + 4b = 0$

λ racine réelle <u>double</u>

$\lambda > 0$: « explosion »

$$y = C_1 \exp(\lambda t) + C_2\, t \exp(\lambda t) \quad \text{OK}$$

$\lambda < 0$: « extinction »

cas 3: $a^2 + 4b < 0$

racines $\lambda \pm i\,\omega$

$$y = \exp(\lambda t)\,(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \quad \text{OK}$$

L'attaque du problème :

résolution de l'équation homogène dans le cas réel (2)) :

a , b réels **conditions initiales (y_0 , $v_0 \in \mathbb{R}$)**

cas 1 : $a^2 + 4 b > 0$

$$y(t) = C_1 \underbrace{\exp(\lambda_1 t)}_{y_1(t)} + C_2 \underbrace{\exp(\lambda_2 t)}_{y_2(t)}$$

cas 2 : $a^2 + 4 b = 0$

$$y(t) = C_1 \overbrace{\exp(\lambda t)}^{y_1(t)} + C_2 \overbrace{t \exp(\lambda t)}^{y_2(t)}$$

cas 3 : $a^2 + 4 b < 0$

$$y(t) = C_1 \overbrace{\exp(\lambda t) \cos(\omega t)}^{y_1(t)} + C_2 \overbrace{\exp(\lambda t) \sin(\omega t)}^{y_2(t)}$$

$$C_1\, y_1(t_0) + C_2\, y_2(t_0) = y_0$$

$$C_1\, y'_1(t_0) + C_2\, y'_2(t_0) = v_0$$

système de Cramer → **solution (C_1,C_2) unique !!**

Recherche d'une solution particulière de l'équation « avec second membre »

I . Méthode de variation des constantes

$$y''(t) = a\, y'(t) + b\, y(t) + c(t) \qquad (*)$$

$C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ solution générale de l'équation y''=ay'+b

$y_{part}(t) = C_1(t)\, y_1(t) + C_2\,(t)\, y_2(t)$ est solution de (*)
dès que :

système de Cramer !

$$\begin{cases} C'_1\, y_1 + C'_2\, y_2 = 0 \\ C'_1\, y'_1 + C'_2\, y'_2 = c \end{cases}$$

$\boxed{\text{Solution unique } (C_1', C_2')}$

Recherche d'une solution particulière de l'équation « avec second membre »

I . Méthode de variation des constantes (suite)

$$C_1'(u) = - \frac{y_2(u)\, c(u)}{(y_1\, y_2' - y_2\, y_1')(u)}$$

$$C_2'(u) = \frac{y_1(u)\, c(u)}{(y_1\, y_2' - y_2\, y_1')(u)}$$

Solution particulière de l'équation avec second membre **par variation des constantes (fin)**

$$C_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(u)\, c(u)}{(y_1\, y_2' - y_2\, y_1')(u)}\, du$$

$$C_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(u)\, c(u)}{(y_1\, y_2' - y_2\, y_1')(u)}\, du$$

$$y_{part}(t) = C_1(t)\; y_1(t) + C_2(t)\; y_2(t)$$

Bilan : la solution du problème de Cauchy
(cond. initiales : y_0, v_0)

solution générale de l'équation
$y''(t) - a\,y'(t) - b\,y(t) = 0$

$$y(t) = \boxed{C_1\, y_1(t) + C_2\, y_2(t)} + \boxed{\int_{t_0}^{t} \frac{c(u)\big(y_1(u)\, y_2(t) - y_2(u)\, y_1(t)\big)}{y_1(u)\, y_2'(u) - y_2(u)\, y_1'(u)}\, du}$$

$$C_1\, y_1(t_0) + C_2\, y_2(t_0) = y_0$$

$$C_1\, y_1'(t_0) + C_2\, y_2'(t_0) = v_0$$

solution particulière de l'équation
$y''(t) - a\,y'(t) - b\,y(t) = c(t)$

Remarque

II. Une autre méthode pour la recherche d'une solution particulière de $y''(t) - a\, y'(t) - by(t) = c(t)$

Si le second membre c est de la forme :

$P(t) \exp(\omega t)$, $\omega \in C$

$P(t) \cos(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$
$P(t) \sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière de la forme :

$y_{part}(t) = Q(t) \exp(\omega t)$, $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$

(par exemple par identification)

Fin du chapitre 10