CHAPITRE 4

Nombres complexes

Le plan $\mathbb{R}^2$ et les nombres complexes

- **Le plan $\mathbb{R}^2$**
- **Le corps (C , + , x)**
- **Module et argument**
- **La fonction exponentielle complexe et les formules de Moivre et d'Euler**
- **Résolution dans C de l'équation algébrique $z^n=A$**
- **Résolution dans C des équations du second degré**

Le plan $\mathbb{R}^2$: une structure d'espace vectoriel

Addition (loi <u>interne</u>)

$$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) := (x_1+x_2 , y_1+y_2)$$

(pour (x_1 , y_1) , (x_2, y_2) dans $\mathbb{R}^2$)

Action « <u>externe</u> » de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$

$$a \, . \, (x , y) = (a \times x , a \times y)$$

(pour a dans $\mathbb{R}$, (x, y) dans $\mathbb{R}^2$)

Les règles régissant les deux opérations (interne et externe)

- $(\mathbb{R}^2,+)$ est un groupe abélien
- $a \,.\, (b \,.\, (x,y)) = (a \times b) \,.\, (x,y)$
- $(a+b) \,.\, (x,y) = a \,.\, (x,y) + b \,.\, (x,y)$
- $a \,.\, ((x_1 ,y_1) + (x_2 ,y_2)) = a \,.\, (x_1 ,y_1) + a \,.\, (x_2 ,y_2)$
- $1 \,.\, (x,y) = (x,y)$

$(\mathbb{R}^2 , + , .)$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Applications <u>linéaires</u> du plan dans lui-même

$$L\left(a \cdot (x_1, y_1) + b \cdot (x_2, y_2)\right) =$$

$$a \cdot L\left((x_1, y_1)\right) + b \cdot L\left((x_2, y_2)\right)$$

Application linéaire $\Longleftrightarrow$ tableau 2 x 2

Matrice de L

$$L\big((1,0)\big) = (a\,,\,c)$$

$$L\big((0,1)\big) = (b\,,\,d)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad L\big((x,y)\big) = (a\,x + b\,y\,,\,c\,x + d\,y)$$

Composition des applications linéaires

et «produit» de tableaux 2 x 2

L_1

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

L_2

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \text{ o } L_1$

$$\begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1+b_2d_1 \\ c_2a_1+d_2c_1 & c_2b_1+d_2d_1 \end{pmatrix}$$

Les complexes ; pourquoi ? Des motivations issues de la physique (et quelques noms)

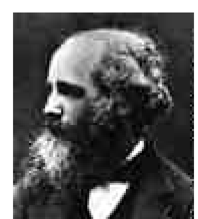
- **Hydrodynamique, Mécanique des fluides**
  (A. Cauchy, G. Stokes, …)

Augustin Cauchy
1789-1857

- **Astronomie et Mécanique Céleste**
  (P. S. Laplace,…)
- **Mécanique Ondulatoire, Thermodynamique, Optique, Electromagnétisme**
  (J. B. J. Fourier, J. C. Maxwell, ..)

Joseph Fourier
1768-1830

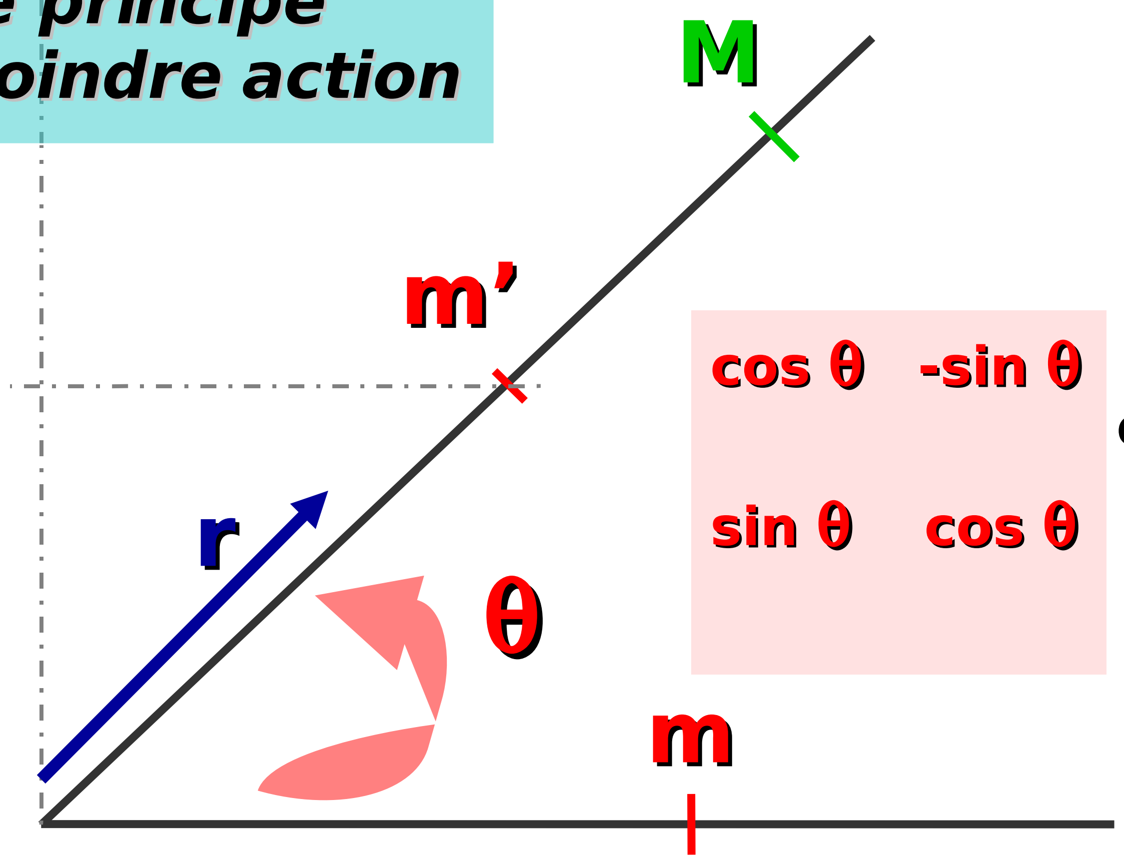
Pierre Simon Laplace
1749-1827



James C. Maxwell
1831-1879

Quelles sont les applications linéaires préservant les angles orientés des figures ??

Le principe de moindre action



$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$a = r\cos(\theta)$$

$$b = r\sin(\theta)$$

L’ensemble des nombres complexes (l’ensemble C)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; \quad a\text{ , }b \text{ dans } \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{a+ib}{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = a \cdot \underset{1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + b \cdot \underset{i}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

L'addition sur C

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 + i\, b_1)+(a_2 + i\, b_2) := (a_1+a_2) + i\,(b_1+b_2)$$

$$(a_1+i\ b_1) \times (a_2 + i\ b_2) = (a_1a_2-b_1b_2) + i\ (a_1b_2 + b_1\ a_2)$$

La Multiplication Sur C

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2+b_1a_2) \\ a_1b_2+b_1a_2 & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}$$

Inverse d’un élément non nul pour la multiplication

$$(a+ib) \times \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \times (a+ib) = 1$$

Propriétés des opérations

Addition

+

(C ,+) groupe abélien

- **Commutativité**
  $z_1+z_2=z_2+z_1$
- **Associativité**
  $z_1+(z_2+z_3)= (z_1+z_2) +z_3$
- **Elément neutre 0 :**
  $z+0 = 0 + z = z$
- **Tout élément z admet un « opposé » -z**
  $z+ (-z) = (-z) + z = 0$

(C,+, x) corps commutatif

Multiplication

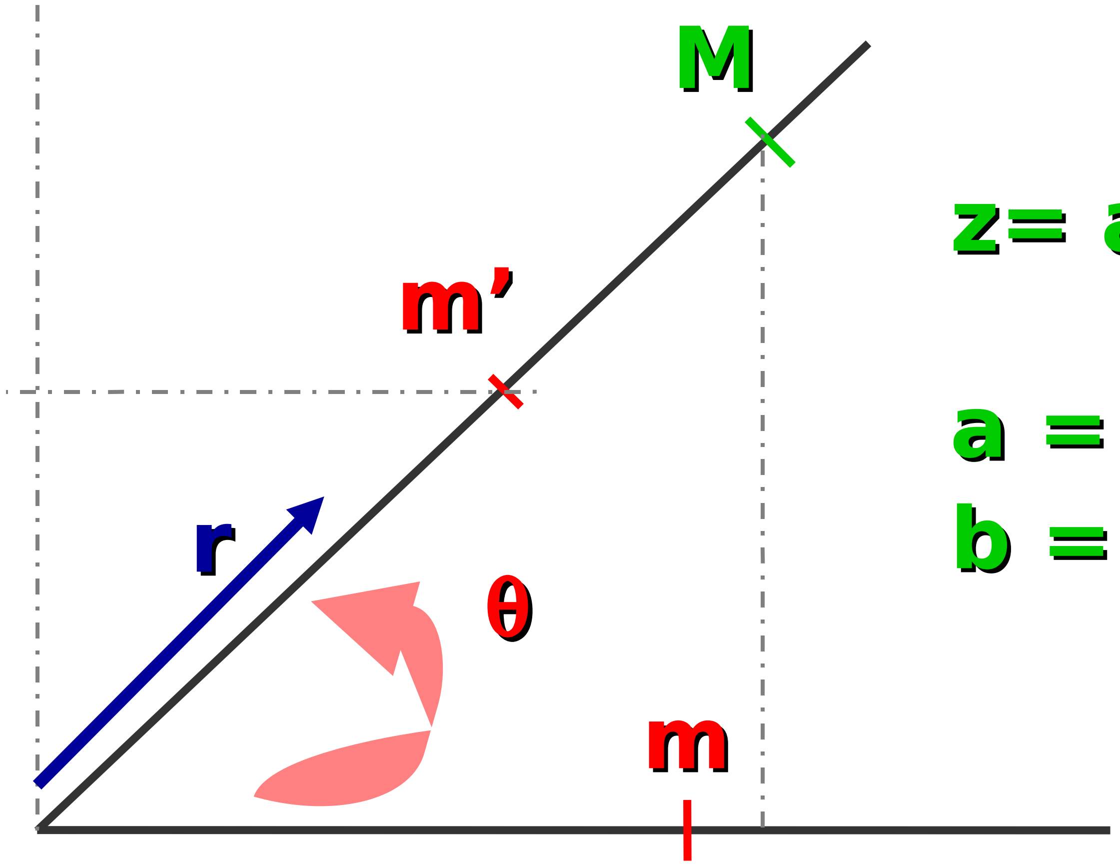
x

- **Commutativité**
  $z_1 \times z_2=z_2 \times z_1$
- **Associativité**
  $z_1 \times (z_2 \times z_3)= (z_1 \times z_2) \times z_3$
- **Elément unité 1:**
  $z \times 1 = 1 \times z = z$
- **Tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication :**
  $z z^{-1} = z^{-1} z = 1$

Distributivité mult/addition

$z_1 \times (z_2+z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$

Module et argument (d'un nombre complexe non nul)



$z = a + ib$

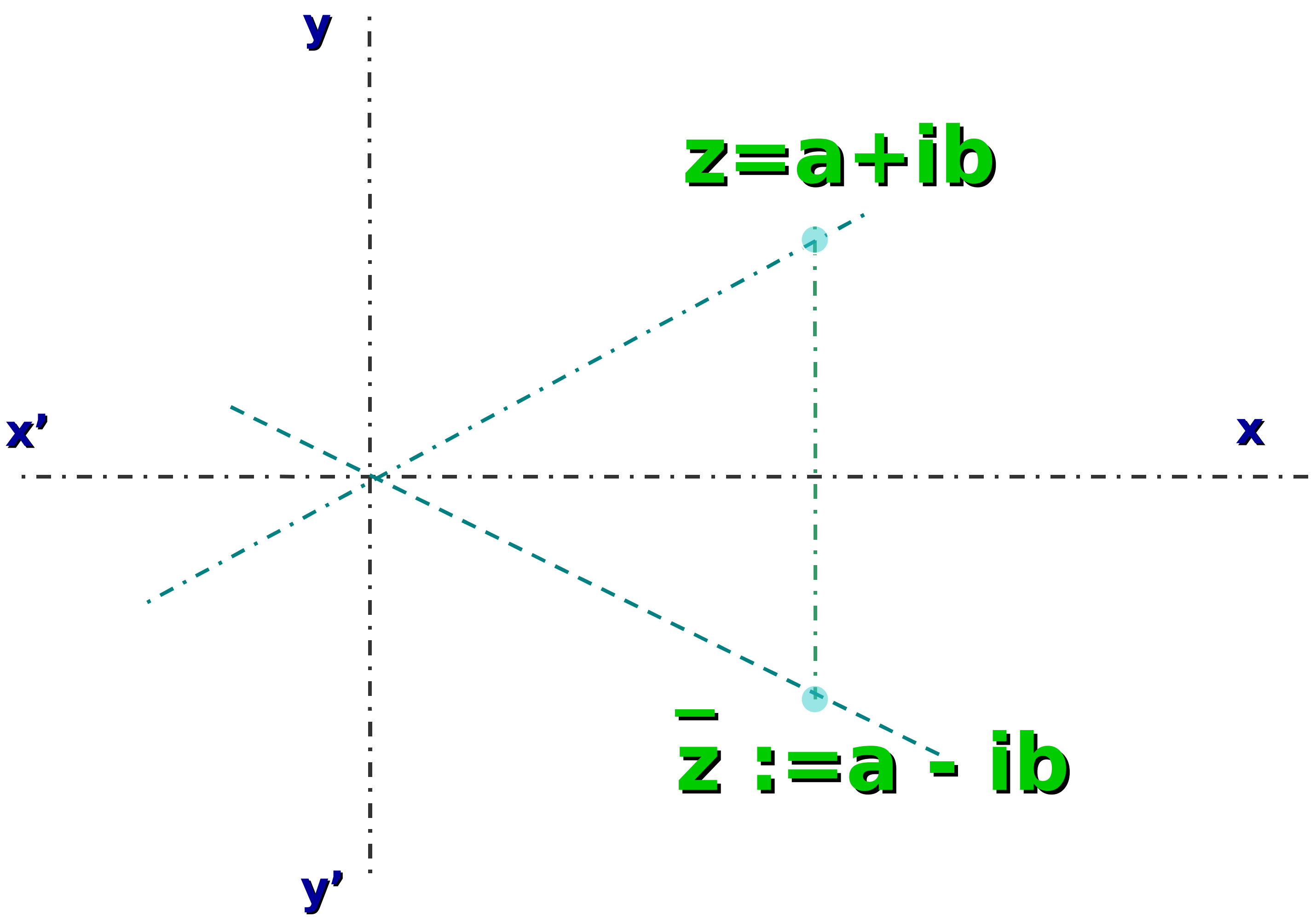
$a = r \cos(\theta)$

$b = r \sin(\theta)$

$r = |z| = (a^2+b^2)^{1/2}$: <u>module</u> (amplitude) de z

θ (modulo 2π) = arg (z) : <u>argument</u> (phase) de z

Conjugaison complexe



Quelques formules utiles (sans ambiguïté)

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|z_1\ z_2\ | = |z_1| \times |z_2|$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$|z|^2 = z\ \bar{z}$$

$$\overline{z_1\ z_2} = \bar{z}_1\ \bar{z}_2$$

$$1/z = \bar{z}\ /|z|^2$$

D'autres formules (à manier avec précaution !)

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ si z est non nul

<u>Attention</u> !! Ce sont des égalités entre classes de nombres réels modulo 2π

La fonction exponentielle

sur R : $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

sur C : $\exp(x+iy) := \exp(x) \times (\cos(y)+i\sin(y))$

sur C : $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

En particulier : $\exp(z) = 1/(\exp(-z))$ [non nul]

$i^2 = -1$

$3.14159265358979385...$

$$e^{2 i \pi} = 1$$

fonction exponentielle

$e = \exp(1) = e^1 = 2.718281828459045235 4...$

Formes trigonométriques, forme cartésienne d'un nombre complexe

- Forme trigonométrique : $\boxed{z = r \cos \theta + i\, r \sin \theta}$
  (avec $r=|z|$ et $\theta = \arg(z)$ [modulo 2π])

- Autre forme trigonométrique : $\boxed{z = r \exp(i\,\theta)}$
  (avec $r=|z|$ et $\theta = \arg(z)$ [modulo 2π])

- Forme cartésienne : $\boxed{z = a + i\, b}$
  (avec $a = \mathrm{Re}(z)$ [partie réelle]
  et $b = \mathrm{Im}(z)$ [partie imaginaire])

Les formules de MOIVRE

$$\cos(n\theta) = \sum_{\{p\in\mathbb{N}\,;\,2p\leq n\}} \binom{n}{2p} (-1)^p (\sin\theta)^{2p} (\cos\theta)^{n-2p}$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{\{p\in\mathbb{N}\,;\,2p+1\leq n\}} \binom{n}{2p+1} (-1)^p (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)}$$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Les formules d'Euler

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta)^n &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta) \\
(\sin\theta)^n &= \frac{(-i)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{i(n-2k)\theta} \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k\cos((2(p-k)\theta)\ si\ n=2p \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}(-1)^k\sin((2(p-k)+1)\theta)\ si\ n=2p+1.
\end{aligned}
$$

$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ **$\sin\theta = (-i/2)\,(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$**

Résoudre $z^N = A$

$$A = R\ e^{i\theta}$$

$$z = R^{1/N}\ e^{(i\theta/N + 2i\pi k/N)}$$

$k=0,1,2,\ldots,N-1$ (N solutions)

Résoudre
$a z^2 + b z + c = 0$

$$az^2+b\,z+c = a\left(z^2 + (b/a)\,z\right) + c$$

$$= a\left(\left(z+ b/(2a)\right)^2 - (b^2-4ac)/(4a^2)\right)$$

δ= discriminant

$\boxed{X^2 = (b^2-4ac)/(4a^2)}$ a (dans C) deux racines X=u et X=–u distinctes si b^2-4ac est non nul

Conclusion : 2 cas à distinguer

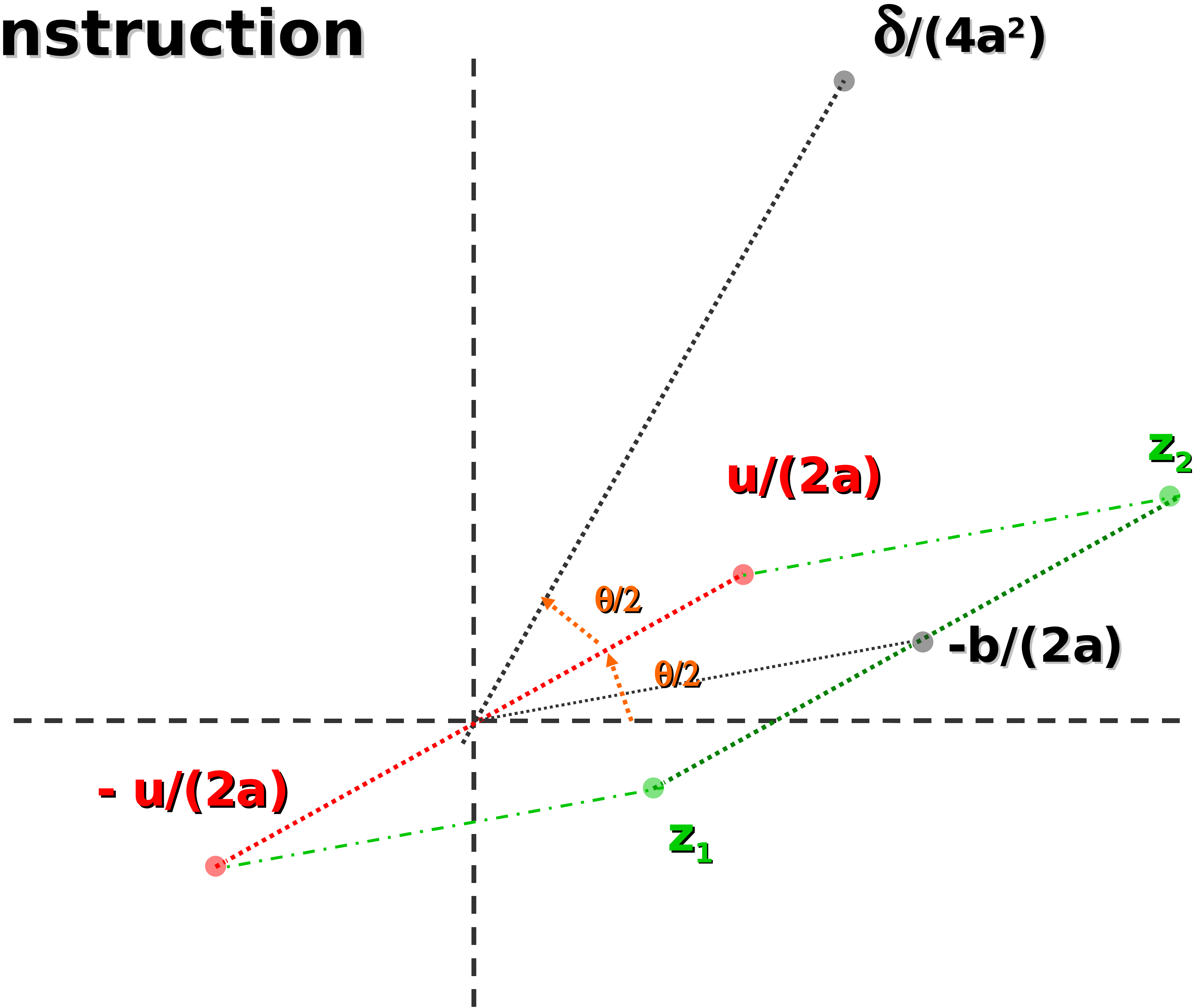
- Si $b^2 - 4\,ac = 0$, il y a une seule solution donnée par $z = -b/(2a)$
- Si $b^2 - 4\,ac$ non nul, il y a deux solutions données par :

$$z_1 = -b/(2a) - u/(2a)$$

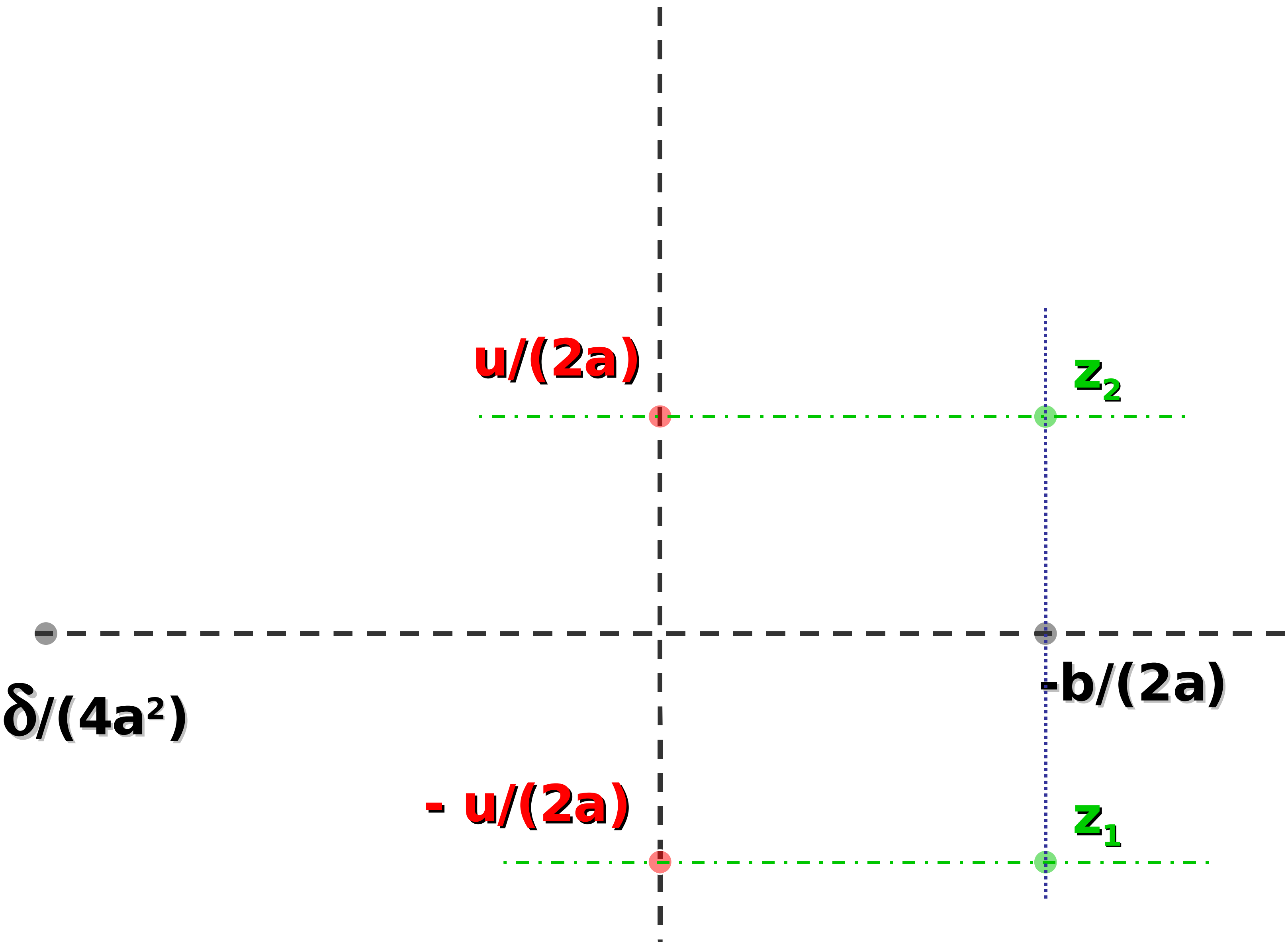
$$z_2 = -b/(2a) + u/(2a)$$

$$u^2 = b^2 - 4\,ac$$

Construction



Cas particulier : a,b,c réels et δ <0



Autres relations utiles pour le calcul de la racine carrée

- $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$
- $|z^2| = x^2 + y^2$
- $x^2 = [|z^2| + \mathrm{Re}(z^2)]/2$
- $y^2 = [|z^2| - \mathrm{Re}(z^2)]/2$
- $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$
- $\Rightarrow$ signe($\mathrm{Im}(z^2)$)= signe (xy)

$\Rightarrow$ **Détermination des racines De z^2 =A sans ambiguïté**

Fin du chapitre 4