CHAPITRE 7

Fonctions numériques usuelles

Le plan du chapitre

- **La fonction exponentielle**
- **La fonction logarithme**
- **Les fonctions puissances**
- **Les fonctions sin et cos ; relations entre les lignes trigonométriques**
- **Les fonctions Arcos et Arsin**
- **La fonction tangente et la fonction Arctan**
- **Quelques relations importantes**
- **Les fonctions trigonométriques sinh et cosh**
- **Les fonctions trigométriques inverses Argsinh et Argcosh**
- **La fonction tanh et son inverse**

La fonction exponentielle

$\lim (e^x/x^n) = +\infty$
en $+\infty$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} \rightarrow \exp(x)$$

$\lim (e^x\, x^n) = 0$
en $-\infty$

$$\boxed{\exp(x_1+x_2) = \exp(x_1) \times \exp(x_2)}$$

La méthode d'Euler

exp ' = exp

Étape 0 : Choix d'un « pas » : 1/N

$u_0 = 1$

Dérivée « discrète »

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{1/N} = u_n$$

$(1+ x/N)^N$ ---> exp (x)
lorsque N tend vers + ∞

La fonction logarithme (1)

$x \in \mathbb{R}$ et $y = \exp(x)$

$\Updownarrow$

$y > 0$ et $x = \log(y)$

$\boxed{\lim_0 (|y| \log |y|) = 0}$

$\boxed{\lim_{+\infty} (\log y / y) = 0}$

$\boxed{\log(y_1\, y_2) = \log(y_1) + \log(y_2)}$

La fonction logarithme (2)

- $\log' = [\, y \dashrightarrow 1/y \,]$ sur $\{ y \,;\, y > 0 \}$
- $(\log |y-a|)' = [\, y \dashrightarrow 1/(y-a) \,]$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$

Remarque : pour tout entier n de Z différent de -1, on a sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ **:**

$$[(y-a)^{n+1} / (n+1)]' = [\, y \dashrightarrow (y-a)^n \,]$$

$a > 0$

Les fonctions puissance

$x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x := \exp(x \log a)$

- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
- $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \times a^{x_2}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $a^{-x} = (1/a)^x$

$[x \rightarrow a^x]' = [x \rightarrow \log(a) \times a^x]$

La fonction cosinus

$x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} \to \cos(x)$$

$\cos 0 = 1$
$\cos 2 < -1/3$

(suites adjacentes)

cos s'annule en au moins un point de [0,2]

$\pi := 2 \inf\{x>0, \cos x=0\}$

La fonction sinus

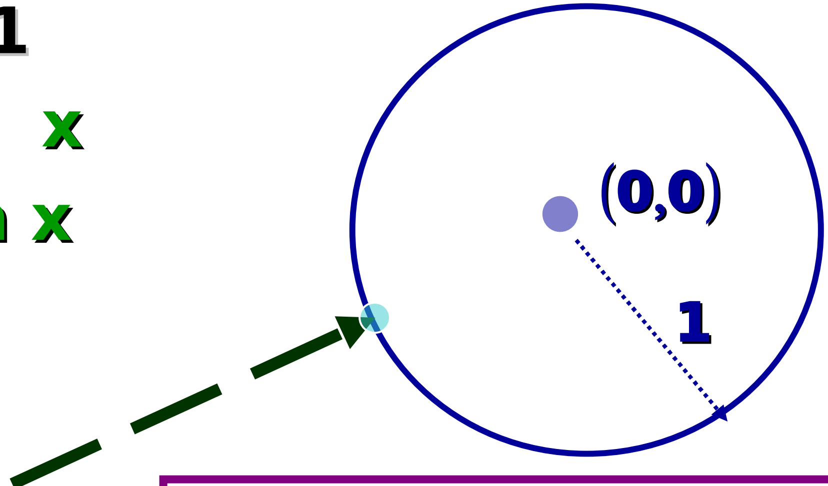
$x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \rightarrow \sin(x)$$

(suites adjacentes)

Relations entre fonctions trigonométriques

- $\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2)$
- $\sin(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\sin(x_2) + \sin(x_1)\cos(x_2)$
- $\cos' = -\sin$
- $\sin' = \cos$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$



$(\cos(x), \sin(x))$

(pour $x \in [0, 2\pi[$)

paramétrage bijectif du cercle de centre (0,0) et de rayon 1

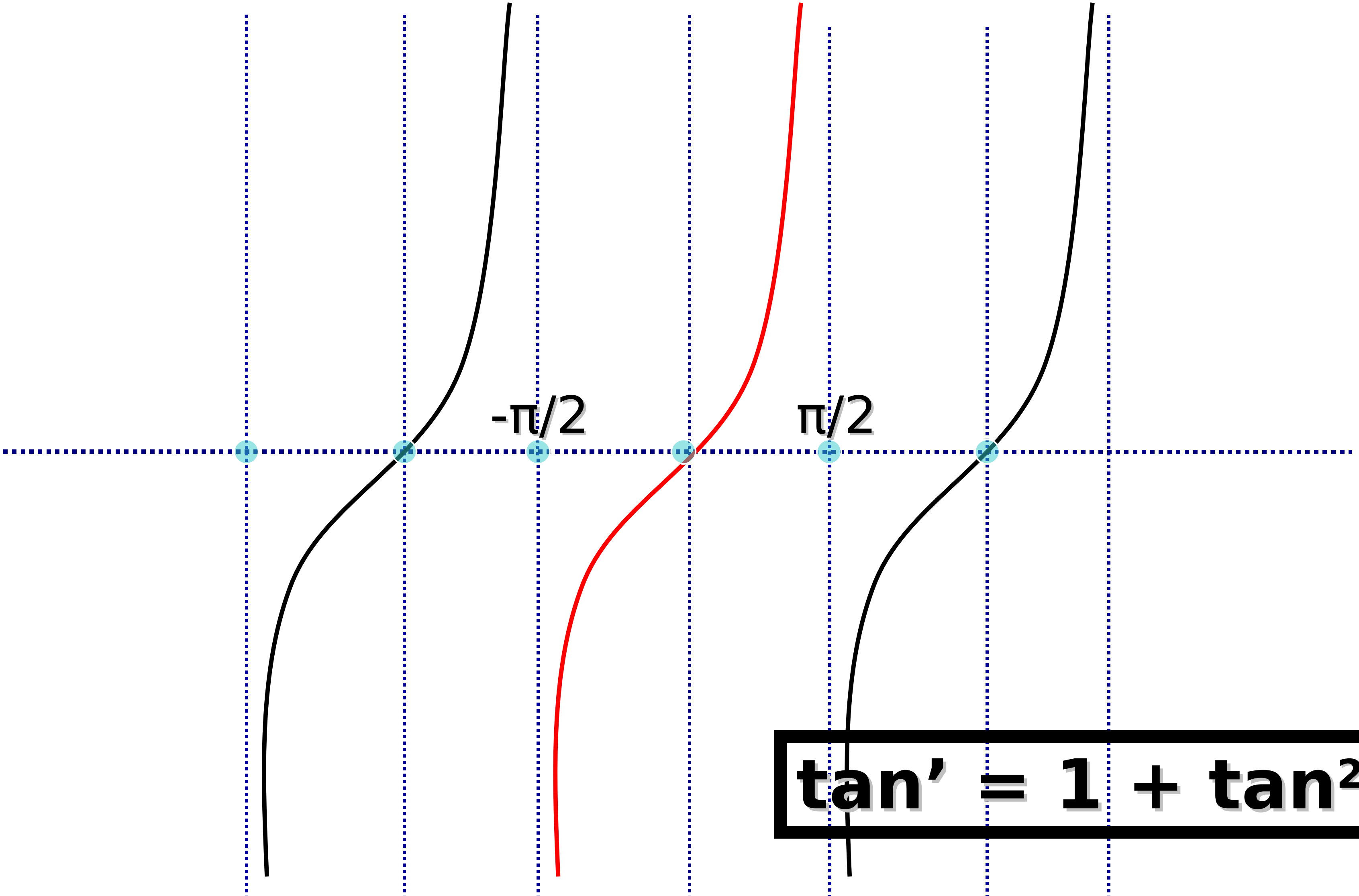
Fonctions trigonométriques inverses

- **Arcos : [-1,1] --- > [0, π]**
- **Arcsin : [-1,1] --- > [-π/2 , π/2]**
- sur]-1,1[Arcsin' = 1/(cos(Arcsin)) = [y → $(1-y^2)^{-1/2}$]
- sur]-1,1[Arcos' = -1/(sin(Arcos)) = [y → - $(1-y^2)^{-1/2}$]

Arcsin (y) + Arcos (y) = π/2 pour y ∈ [-1,1]

La fonction tangente

tan x := sin (x) / cos (x)



$$\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$$

La fonction Arctan (Arc-tangente)

$x \in \left]-\pi/2\, ,\, \pi/2\right[$ et $y = \tan(x)$

$\Updownarrow$

$\boxed{y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \operatorname{Arctan}(y)}$

$$\operatorname{Arctan}'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} y)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Quelques relations importantes

- $\cos(t) = 2\cos^2(t/2) - 1$

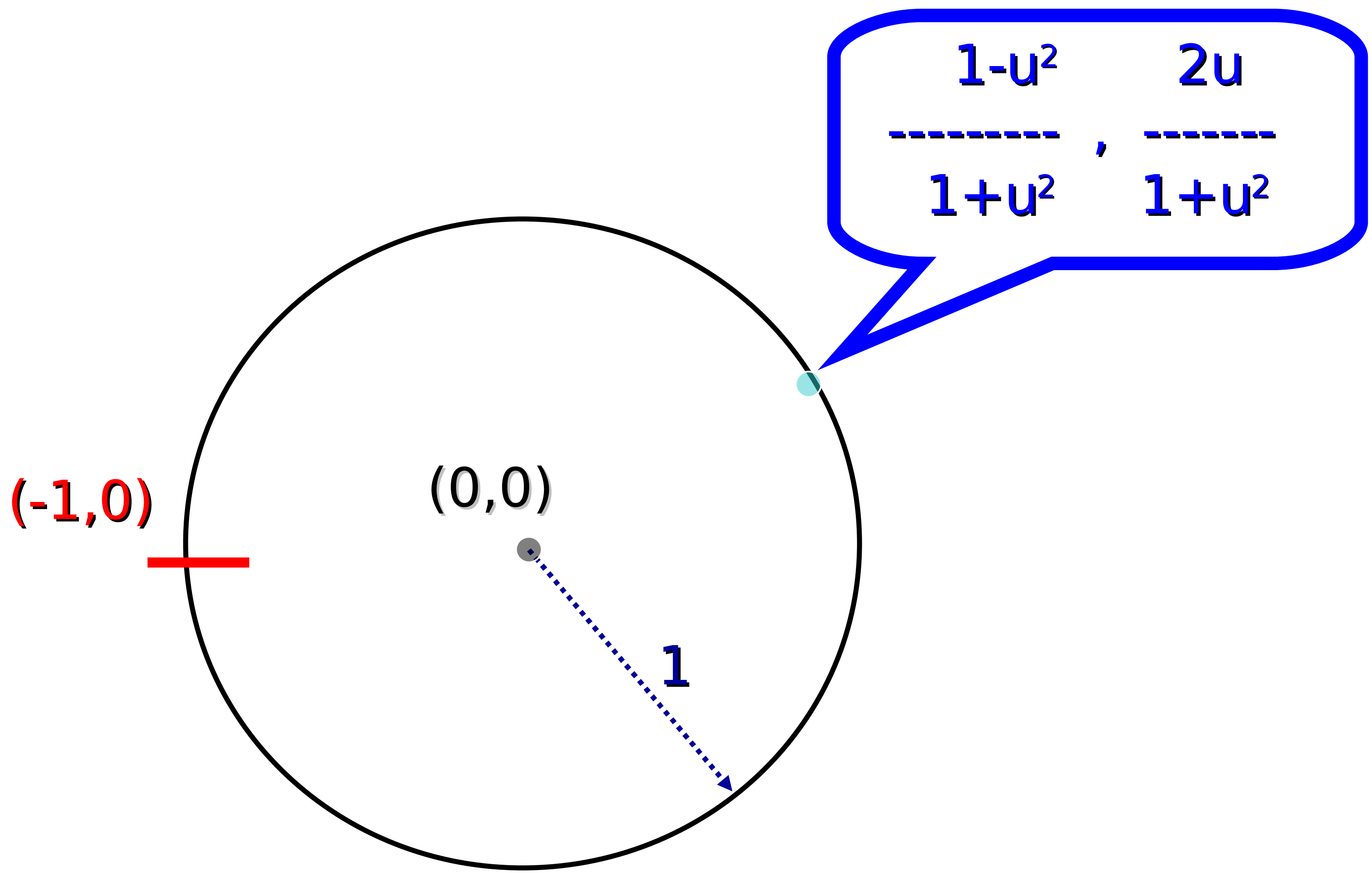
  $= (1-u^2)/(1+u^2)$

- $\sin(t) = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$

  $= 2u/(1+u^2)$

$t \in]-\pi, \pi[$

$u = \tan(t/2)$, $t = 2 \operatorname{Arctan} u$



Un paramétrage rationnel du cercle unité privé d'un point

Les fonctions hyperboliques

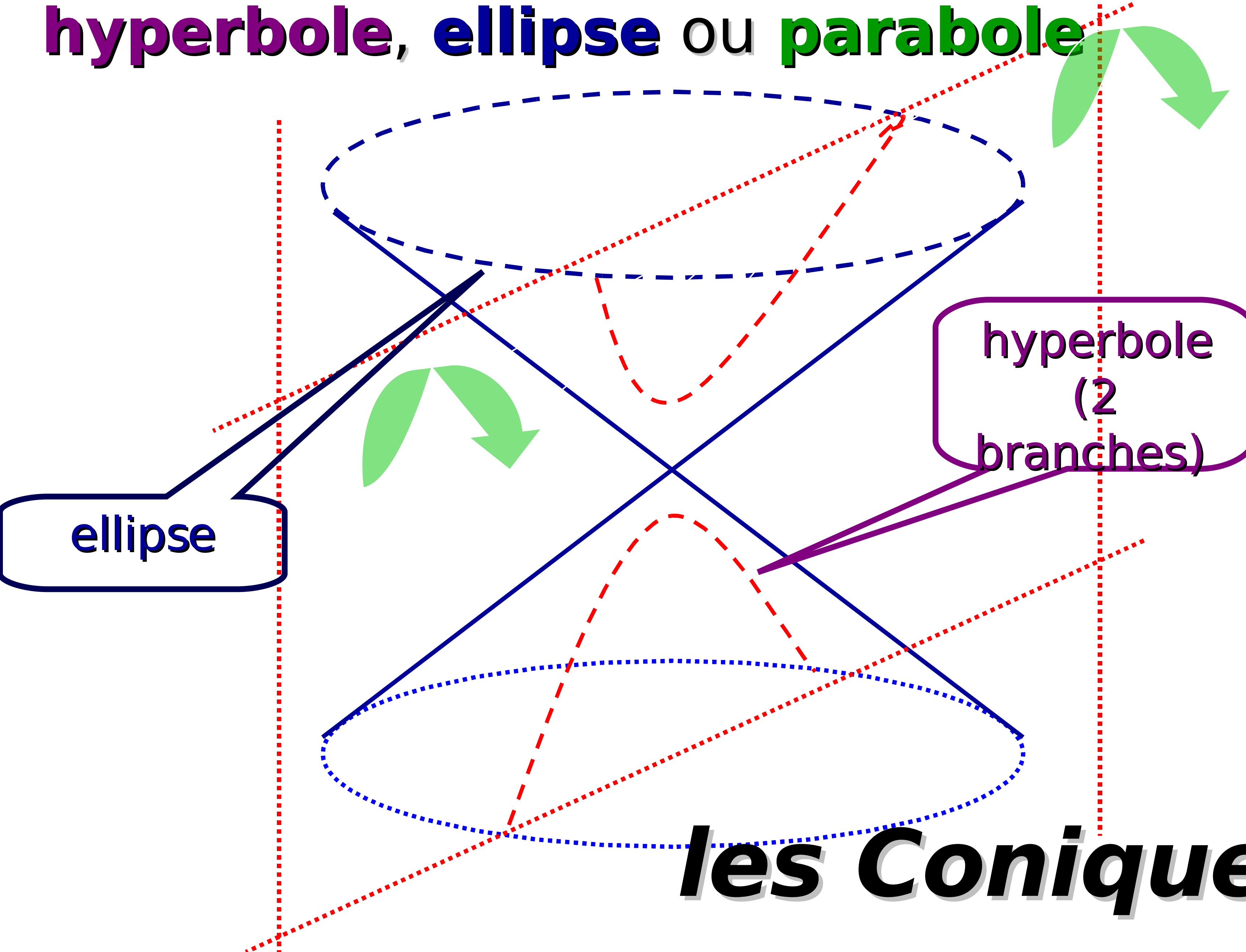
- **$\cosh x := (e^x+e^{-x})/2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$**
- **$\sinh x := (e^x - e^{-x})/2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$**

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$\cosh' = \sinh$ **$\sinh' = \cosh$**

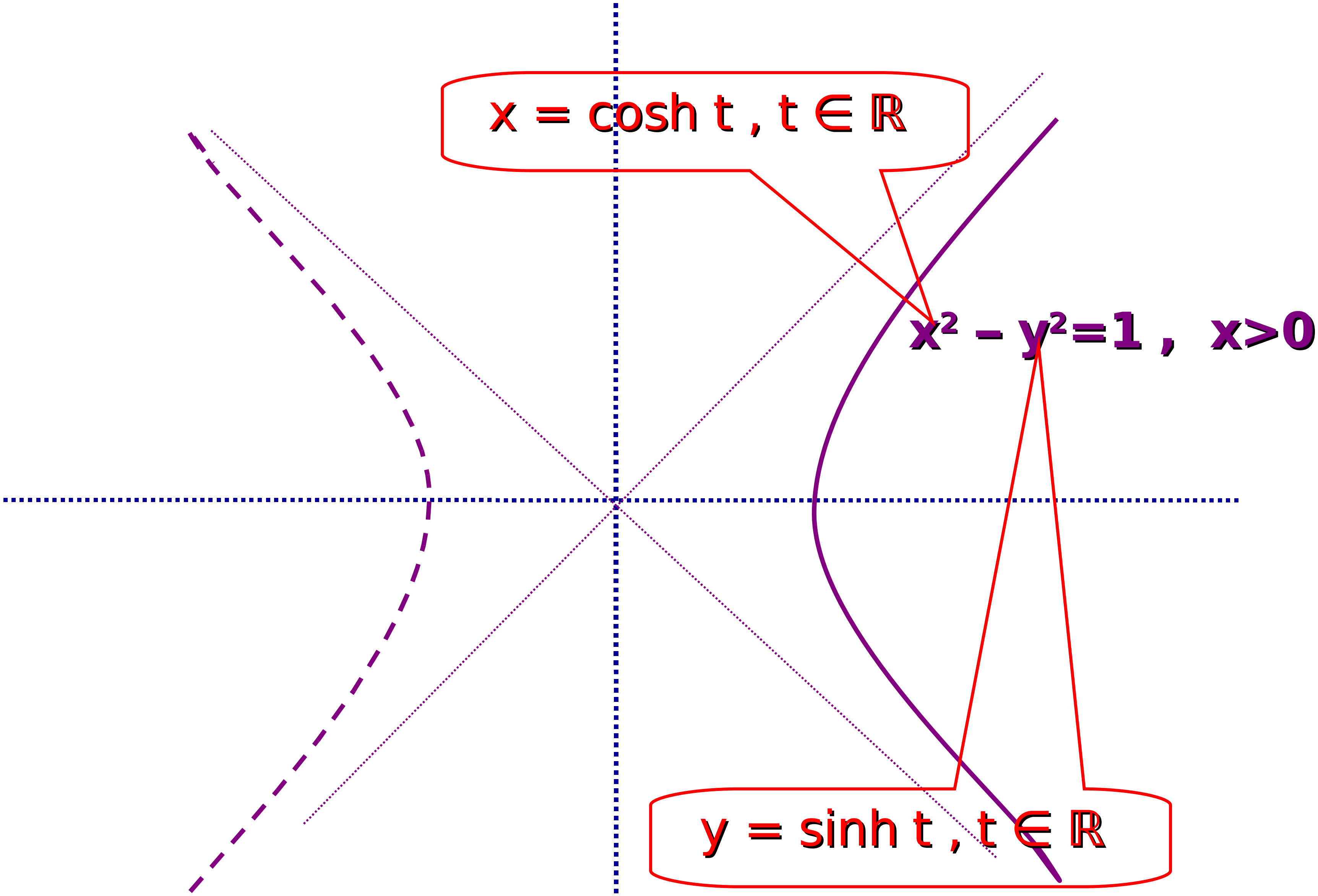
Intersection d'un plan et d'un cône :

hyperbole, **ellipse** ou **parabole**



les Coniques

Le paramétrage de la demi-hyperbole



La fonction argsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $y = \sinh x$ $\Longleftrightarrow$ $y \in \mathbb{R}$ et $x = \operatorname{argsinh} y$

variable auxiliaire

$$\operatorname{argsinh}'(y) = 1/\cosh(\operatorname{argsinh}(y)) = (1+y^2)^{-1/2}$$

$$\sinh x = y \Longleftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2y\,X - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x = \operatorname{argsinh} y = \log\left[y + (1+y^2)^{1/2}\right]}$$

La fonction argcosh :

$$\{y \,;\, y \geq 1\} \to \{x \,;\, x \geq 0\}$$

$x \geq 0$ et $y = \cosh x$ $\Longleftrightarrow$ $y \geq 1$ et $x = \text{argcosh}\, y$

variable
auxiliaire

$$\text{argcosh}'(y) = 1/\sinh(\text{argcosh}(y)) = (y^2 - 1)^{-1/2} \;,\; y > 1$$

$$\cosh x = y \Longleftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ x > 0 \text{ (donc } X > 1) \\ X^2 - 2y\,X + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x = \text{argcosh}\, y = \log\,[y + (y^2 - 1)^{1/2}]}$$

La fonction tangente hyperbolique

- $\tanh \; : \; x \in \mathbb{R} \to \tanh x := \sinh x / \cosh x$
- $\tanh' : \; x \in \mathbb{R} \to 1 - \tanh^2 x = (\cosh x)^{-2}$

$x \in \mathbb{R}$ et $y = \tanh x$ ⟺ $y \in \,]-1,1[$ et $x = \text{argtanh } y$

$\text{argtanh}' \, y = 1/(1-y^2)$

$= (1/2) \times 1/(y+1) \; - (1/2) \times 1/(y-1)$

pour $y \in \,]-1,1[$

⇒ $\boxed{\text{argtanh } y = \log (|y+1|/|y-1|)^{1/2} \quad , \; y \in \,]-1,1[}$

Fin du chapitre 7