UE MAT401 , Devoir Surveillé 1, Lundi 19 Mars 2007
Durée : 1 heure 20 mn

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Nota : *Dans tout le texte, la notation* log *désigne le logarithme néperien.*

Question de cours : *La convergence absolue d'une série numérique* $[u_n]_{n\geq 0}$ *implique t'elle sa convergence ? Une série numérique convergente est-elle toujours absolument convergente ? Si vous répondez NON à l'une de ces questions, donnez explicitement un exemple pour justifier votre réponse.*

Oui, la convergence absolue d'une série numérique $[u_n]_{n\geq 0}$ implique bien sa convergence. Par contre, la réciproque est fausse : en effet la série alternée $[(-1)^{n-1}/n]_{n\geq 1}$ est convergente (d'après le critère des séries alternées) alors que la série des modules $[1/n]_{n\geq 1}$ (série harmonique) est divergente d'après le critère de Riemann.

Exercice 1. *Si* $a > 0$*, on considère la série numérique de terme général*

$$u_n := \sin\Big(\frac{\pi}{2}\ \frac{an+1}{2n^2+an+1}\Big)\ ,\ n \geq 0\,.$$

S'agit-il d'une série à termes positifs ? Quelle est la nature de cette série ? (on citera avec soin le critère invoqué).

On a, pour tout $n \geq 0$, $an + 1 + 2n^2 \geq an + 1$, donc

$$\frac{\pi}{2}\frac{an+1}{2n^2+an+1} \in [0,\pi/2]\,;$$

comme sin est une fonction positive sur $[0,\pi/2]$, la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est une série à termes positifs. On écrit, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\times\frac{an+1}{2n^2+an+1} &= \frac{\pi}{2}\times\frac{an+1}{2n^2\Big(1+\dfrac{an+1}{2n^2}\Big)}\\ &= \frac{\pi}{2}\times\frac{an+1}{2n^2}+o(1/n) = \frac{\pi a}{4n}+o(1/n)\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $(1+u)^{-1} = 1-u+o(u)$ au voisinage de $u = 0$. Or $\sin u \sim u$ au voisinage de $u = 0$; donc

$$u_n \sim \frac{\pi a}{4n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Le critère de comparaison s'applique donc ici et la série $[u_n]_{n\geq 0}$ a même nature que la série de Riemann convergente $[1/n]_{n\geq 1}$; elle est donc divergente.

Exercice 2. *Montrer que pour tout nombre réel θ, la limite*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{\log k}\Big)$$

existe et est finie (on citera avec soin le critère utilisé).

La suite $(1/\log k)_{k\geq 2}$ est une suite tendant vers 0 en décroissant lorsque k tend vers l'infini ; de plus, pour tout $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=2}^{N}\sin(k\theta)\Big| &\leq \Big|\sum_{k=2}^{N}e^{ik\theta}\Big|\\ &\leq \frac{|1-e^{i(N-1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|}\\ &\leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}\,;\end{aligned}$$

les sommes partielles de la série $[\sin(k\theta)]_{k\geq 2}$ sont donc bornées. Le critère d'Abel s'applique donc (avec $u_k = \sin(k\theta)$ et $v_k = 1/\log k$, $k \geq 2$) pour assurer que la série $[\sin(k\theta)/\log k]_{k\geq 2}$ est convergente.

Exercice 3. *On veut connaître une approximation du nombre*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$$

à 10^{-4} près . Exhibez (en donnant explicitement sa valeur) un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on soit certain que le nombre décimal

$$x_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$$

fournisse la valeur attendue (on citera avec précision le résultat concernant les séries alternées que l'on utilise).

Le reste $r_n = u_{n+1} + \cdots + u_k + \cdots$ de la série alternée

$$[u_k]_{k\geq 1} = [(-1)^{k-1}/k^3]$$

est majoré (en valeur absolue) par le premier terme négligé (donc ici par $1/(n+1)^3$) et du signe de ce terme (donc positif si n est pair, négatif si n est impair). Si l'on veut que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$$

soit une approximation de x à 10^{-4} près, il suffit donc que $1/(n+1)^3 \leq 10^{-4}$, soit $(n+1)^3 \geq 10^4$, c'est à dire $n > 10^{4/3} \simeq 21,54$; le choix de $N = 22$ convient donc ici.

Exercice 4. *Quelle est la nature de la série numérique*

$$\Big[\frac{1}{n\log n}\Big]_{n\geq 2}\ ?$$

L'intégrale impropre

$$\int_2^\infty \frac{\sin t}{t\log t}\,dt$$

est elle une intégrale absolument convergente ? semi-convergente ? Mêmes questions pour l'intégrale impropre

$$\int_2^\infty \frac{\sin t^\alpha}{t\log t}\,dt$$

(si α désigne un nombre réel strictement positif).

On a, si $x \geq 2$,

$$\int_2^x \frac{dt}{t\log t} = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{du}{u} = \log(\log x) - \log(\log 2)\,;$$

comme

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{dt}{t\log t} = +\infty$$

et que la fonction $t \mapsto 1/(t\log t)$ est décroissante positive (car produit de deux fonctions décroissantes) sur $[2,\infty[$, le critère de comparaison séries/intégrales permet d'affirmer que la série de Bertrand $[1/(k\log k)]_{k\geq 2}$ est divergente.

On a, par changement de variables sur chaque intervalle $[n\pi,(n+1)\pi[$ et π-périodicité de la fonction $t \mapsto |\sin t|$,

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t\log t}\,dt &= \sum_{n=1}^{N} \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{(n\pi+t)\log(n\pi+t)}\,dt \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi\log((n+1)\pi)} \int_0^\pi |\sin t|\,dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)\log((n+1)\pi)}\,;
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)\log((n+1)\pi)} = +\infty$$

d'après le **a**, l'intégrale

$$\int_2^\infty \frac{\sin t}{t\log t}\,dt$$

n'est pas absolument convergente. Posons, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{(t+n\pi)\log(t+n\pi)}\,dt\,.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car

$$a_n \leq \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin t|}{\log(t+\pi)}\,dt \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Si $x\in[N\pi,(N+1)\pi[$ (N étant un entier strictement positif), on a

$$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t\log t}\,dt = -a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^N a_N + \int_{N\pi}^x \frac{\sin t}{t\log t}\,dt\,.$$

Comme la série alternée $[(-1)^n a_n]_{n\geq 1}$ converge (critère des séries alternées) et que

$$\Big|\int_{N\pi}^x \frac{\sin t}{t\log t}\,dt\Big| \leq \frac{\pi}{N\pi\log(N\pi)} = o(1)$$

lorsque $x\in[N\pi,(N+1)\pi[$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{\sin t}{t\log t}\,dt = \int_2^\pi \frac{\sin t}{t\log t}\,dt + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n\,,$$

ce qui prouve que l'intégrale impropre

$$\int_2^\infty \frac{\sin t}{t\log t}\,dt$$

est semi-convergente.

Grâce à la formule de changement de variables dans les intégrales impropres, la non-convergence absolue de l'intégrale impropre

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{t\log t}\,dt$$

équivaut (proposition 2.3 du cours) à la non - convergence absolue de l'intégrale impropre

$$\int_{2^{1/\alpha}}^{+\infty} \frac{\sin t^\alpha}{t^\alpha\log(t^\alpha)}\,\alpha t^{\alpha-1}dt\,,$$

soit à la non - convergence absolue de l'intégrale

$$\int_{2^{1/\alpha}}^{+\infty} \frac{\sin t^\alpha}{t \log t}\, dt\,,$$

ou encore de l'intégrale impropre

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{\sin t^\alpha}{t \log t}\, dt\,.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty$, que $\varphi\ : t \mapsto t^\alpha$ envoie $[2^{1/\alpha}, +\infty[$ dans $[2, +\infty[$ de manière C^1, la semi-convergence de l'intégrale impropre

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\sin t}{t \log t}\, dt$$

implique (proposition 2.4 du cours) la semi-convergence de l'intégrale impropre

$$\int_{2^{1/\alpha}}^{+\infty} \frac{\sin t^\alpha}{t \log t^\alpha}\, \alpha t^{\alpha-1} dt\,,$$

donc la semi-convergence de l'intégrale impropre

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\sin t^\alpha}{t \log t}\, dt\,.$$