

UE MAT401

Devoir Surveillé 1, Mercredi 16 Mars 2004

Durée: 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Discuter suivant les valeurs de a et b la nature (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série numérique de terme général

$$u_n(a, b) := \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}, \quad n \geq 0.$$

Exercice 2.

a. Rappeler quelle est la nature (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série harmonique $[1/n]_{n \geq 1}$ et donner un équivalent simple, lorsque n tend vers $+\infty$, de

$$v_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

b. Soit θ un nombre réel. Quelle est la nature (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + (\log n) \sin(n\theta)}{n}, \quad n \geq 1 ?$$

Exercice 3.

a. La fonction définie par

$$f(t) = \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$$

est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$? (dans tous les cas, justifier le résultat).

b. Quelle est la nature asymptotique (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série numérique de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1 ?$$

c. Montrer que la fonction

$$t \in]0, +\infty[\rightarrow \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

a une limite (que l'on calculera) en $t = 0$. Prouver que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

est une intégrale impropre semi-convergente ; la fonction définie par

$$f(t) := \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$? (justifier le résultat).