UE MAP603
Devoir Surveillé, Mardi 20 Mars 2007
Durée : 3 heures, *Documents non autorisés*

TEXTE *(en italiques)* **et CORRIGE**

Problème I

Soit H un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert. On note $\| \;\|$ la norme dérivant du produit scalaire.

I.1. *Soit V un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel fermé de H et Proj_V l'opérateur de projection orthogonale sur V. Montrer que Proj_V est un opérateur de norme inférieure ou égale à 1 (c'est à dire que $\|\mathrm{Proj}_V(h)\| \leq \|h\|$ pour tout h dans H). Quels sont les vecteurs que Proj_V laisse invariants ?*

On a, pour tout $h \in H$,

$$\|h\|^2 = \|\mathrm{Proj}_V(h)\|^2 + \|h - \mathrm{Proj}_V(h)\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore, d'où

$$\|\mathrm{Proj}_V(h)\|^2 \leq \|h\|^2 ,$$

ce qui prouve bien que Proj_V est de norme au plus égale à 1. Les vecteurs invariants par Proj_V sont les éléments de V.

I.2. *Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs h_1 et h_2 de H ; sous quelle condition (nécessaire et suffisante) cette inégalité devient-elle une égalité ? [on demande d'énoncer le résultat sans démonstration]*

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\forall\, h_1, h_2 \in H\ ,\ |\langle h_1, h_2\rangle| \leq \|h_1\|\, \|h_2\| .$$

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si les vecteurs h_1 et h_2 sont liés.

I.3. *On considère un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire $T : H \longrightarrow H$ tel que $\|T(h)\| \leq \|h\|$ pour tout h dans H. Montrer l'équivalence des deux assertions :*

- *le vecteur h vérifie $T(h) = h$;*
- *le vecteur h vérifie $\langle T(h)\, ,\, h\rangle = \|h\|^2$*

(on pourra s'aider du résultat rappelé en **I.2***).*

Si $T(h) = h$, on a

$$\langle T(h)\, ,\, h\rangle = \|h\|^2 .$$

Réciproquement, si

$$\langle T(h)\, ,\, h\rangle = \|h\|^2 ,$$

on a

$$|\langle T(h)\,,\,h\rangle| = \|T(h)\| \times \|h\| \qquad (\dagger)$$

puisque l'on aurait simultanément

$$|\langle T(h)\,,\,h\rangle| = \|h\|^2 \leq \|T(h)\| \times \|h\| \leq \|h\|^2$$

du fait que T est une contraction. La contrainte ($\dagger$) nous place dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et, d'après le rappel du **I.2**, les vecteurs $\|h\|$ et $\|T(h)\|$ sont liés. S'ils ne sont pas tous les deux nuls (auquel cas $T(h) = h = 0$) on a $T(h) = \lambda h$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Mais alors

$$\langle T(h)\,,\,h\rangle = \lambda \|h\|^2 = \|h\|^2\,,$$

ce qui implique $\lambda = 1$ et donc $T(h) = h$.

I.4. *On reprend l'opérateur T de la question* **I.3**. *Montrer (en utilisant l'équivalence établie en* **I.3***) que* $\mathrm{Ker}\,(I - T) = \mathrm{Ker}\,(I - T^*)$ *; en déduire que l'on a la décomposition suivante de H :*

$$H = \mathrm{Ker}\,(I - T) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}\,. \qquad (*)$$

Dire que $h \in \mathrm{Ker}\,(I - T)$ équivaut à dire $T(h) = h$, ou encore, d'après le **I.3**,

$$\langle T(h)\,,\,h\rangle = \|h\|^2\,.$$

Grâce à la formule d'adjonction, on a donc

$$\langle h\,,\,T^*(h)\rangle = \|h\|^2 = \overline{\langle h\,,\,T^*(h)\rangle} = \langle T^*(h)\,,\,h\rangle\,.$$

Toujours d'après l'équivalence prouvée au **I.2**, il vient $T^*(h) = h$, par conséquent $h \in \mathrm{Ker}\,(I - T^*)$. On a donc

$$\mathrm{Ker}\,(I - T) \subset \mathrm{Ker}\,(I - T^*)\,;$$

en utilisant le fait que la prise d'adjoint est involutive ($(T^*)^* = T$), on obtient l'autre inclusion en remplacant T par T^*.

On sait d'après le cours que

$$H = \mathrm{Ker}\,(I - T^*) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}$$

puisque $T = (T^*)^*$ et que l'orthogonal du noyau d'un opérateur continu est égal à l'adhérence de l'image de son adjoint. Mais on a $\mathrm{Ker}\,(I - T) = \mathrm{Ker}\,(I - T^*)$. On a donc bien la décomposition de H sous la forme

$$H = \mathrm{Ker}\,(I - T) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}\,. \qquad (*)$$

I.5. *On poursuit avec l'opérateur T introduit à la question* **I.3**. *On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k(h) = T \overset{k \text{ fois}}{\circ \cdots \circ} T(h)$. Montrer que, pour tout $h \in \mathrm{Ker}\,(I-T)$, on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h + T(h) + T^2(h) + \cdots + T^n(h)}{n+1} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}\,(I-T)}\,(h)\,.$$

Prouver que ceci est encore vrai si h est dans $\overline{\mathrm{Im}\,(I-T)}$ (on pourra commencer par le vérifier lorsque h est dans l'image de $I-T$). En tirant parti de la décomposition $(*)$, en déduire : que

$$\forall h \in H\,,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{h + T(h) + T^2(h) + \cdots + T^n(h)}{n+1} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}\,(I-T)}\,(h)\,.$$

Si $h \in \mathrm{Ker}\,(I-T)$, on a

$$h = T(h) = T^2(h) = \cdots = T^k(h) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*\,.$$

On a donc

$$h = \frac{h + T(h) + T^2(h) + \cdots + T^n(h)}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Mais $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}\,(I-T)}(h) = h$ dans ce cas et le résultat voulu est établi.
Si $h \in \overline{\mathrm{Im}\,(I-T)}$, il s'agit de montrer que la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h + T(h) + T^2(h) + \cdots + T^n(h)}{n+1}$$

vaut 0 puisque $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}\,(I-T)}(h) = 0$ si $h \in \overline{\mathrm{Im}\,(I-T)} = (\mathrm{Ker}\,(I-T))^{\perp}$. Prenons un tel h adhérent à l'image de $I-T$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe $y_\epsilon \in H$ tel que

$$\|h - (I-T)(y_\epsilon)\| \leq \epsilon/2\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{I + T + \cdots + T^n}{n+1}[h]\Big\| &\leq \Big\|\frac{I + T + \cdots + T^n}{n+1}[h - (I-T)(y_\epsilon)]\Big\| \\
&\quad + \Big\|\frac{I + T + \cdots + T^n}{n+1}[(I-T)(y_\epsilon)]\Big\| \\
&\leq \|h - (I-T)(y_\epsilon)\| + \frac{1}{n+1}\|(I - T^{n+1})(y_\epsilon)\| \\
&\leq \epsilon/2 + \frac{2\|y_\epsilon\|}{n+1}
\end{aligned}$$

puisque T est une contraction. Pour n assez grand (en fonction de $\|y_\epsilon\|$), on a

$$\frac{2\|y\|}{n+1} \leq \epsilon/2$$

et par conséquent

$$\left\| \frac{I + T + \cdots + T^n}{n+1}[h] \right\| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,,$$

ce qui achève la preuve du résultat car ϵ était arbitraire.
Tout élément h de H s'écrit de manière unique sous la forme $h = h_1 + h_2$, avec $h_1 \in \mathrm{Ker}\,(I - T)$ et $h_2 \in \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}$ (d'après la décomposition établie à la question **I.4**). Si

$$S_n := \frac{1}{n+1}(\mathrm{Id}_H + T + T^2 + \cdots + T^n)\,,$$

on a

$$S_n(h) = S_n(h_1) + S_n(h_2)\,.$$

D'après ce qui précède,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(h_1) = h_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} S_n(h_2) = 0\,.$$

Or

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}\,(I-T)}(h_1 + h_2) = h_1$$

car $h_2 \perp h_1$. Le résultat est donc bien démontré.

Problème II

On considère le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2, e^{-x^2-y^2}\,dxdy)$ constitué des classes $\dot{f}$ de fonctions mesurables $f\ : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{C}$ telles que

$$\|\dot{f}\|^2 := \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2\, e^{-x^2-y^2}\,dxdy < +\infty\,,$$

équipé du produit scalaire

$$\langle \dot{f}\,,\,\dot{g}\rangle := \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\overline{g(x,y)}\,e^{-x^2-y^2}\,dxdy\,.$$

II.1. *Vérifier que les classes des fonctions $(x,y) \longmapsto (x+iy)^n$ forment un système orthogonal de H et que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \|(x+iy)^n\| = \sqrt{\pi n!}$$

(on pensera dans les divers calculs d'intégrales doubles de cette question et des suivantes à utiliser le changement de variables consistant à exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y) en coordonnées polaires).

On calcule le produit scalaire de deux telles classes avec $n \neq m$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x+iy)^n (x-iy)^m e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(n-m)\theta} r^{n+m} e^{-r^2}\, rdrd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta \times \int_0^{\infty} r^{n+m+1} e^{-r^2}\, dr = 0$$

grâce au changement de variables consistant à passer en coordonnées polaires et au théorème de Fubini. Si $n = m$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x+iy)^n (x-iy)^n e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(n-m)\theta} r^{2n} e^{-r^2}\, rdrd\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\infty} u^n e^{-u}\, du = \pi n!\,.$$

On a donc
$$\|(x+iy)^n\| = \sqrt{\pi\, n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$
(avec la convention $0! = 1$).

II.2. *On désigne par V le plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel fermé de H contenant toutes les classes de fonctions*

$$(x, y) \longmapsto (x+iy)^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer que V équipé de la norme $\|\ \|$ restreinte à V est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert. Construire (en utilisant le résultat établi au **II.1***) une base hilbertienne de V. Calculer le produit scalaire (dans H) entre la classe de*

$$(x, y) \longmapsto x - iy$$

et chaque classe
$$(x, y) \longmapsto (x+iy)^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Le sous-espace vectoriel V est-il égal à H ? Quelle est la projection orthogonale sur V des fonctions

$$(x, y) \longmapsto (x^2+y^2)\,, \quad (x, y) \longmapsto xy$$

Le sous-espace V équipé de la norme $\| \ \|$ (restreinte à V et qui dérive d'un produit scalaire) est complet car c'est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert (donc complet). Les classes des fonctions

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi n!}}(x+iy)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

forment d'après le **II.1** un système orthonormé de V. Comme V est le plus petit sous-espace fermé contenant ces classes, elles engendrent bien un sous-espace dense dans V et constituent donc une base hilbertienne de V. On a

$$\begin{aligned}\langle x-iy\,,\,(x+iy)^n\rangle &= \iint_{\mathbb{R}^2}(x-iy)(x-iy)^n\,e^{-x^2-y^2}\,dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)\theta}\,d\theta \times \int_0^{\infty} r^{n+2}\,e^{-r^2}\,dr = 0\end{aligned}$$

(toujours grâce au passage en coordonnées polaires et au théorème de Fubini). La classe de fonctions

$$(x,y) \longmapsto x-iy$$

est donc orthogonale à tout élément de V et est non nulle, ce qui prouve $V \neq H$. Pour trouver la projection orthogonale sur V de la fonction

$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2\,,$$

on calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les produits scalaires avec les éléments e_n, $n \in \mathbb{N}$, constituant la base hilbertienne de V, *i.e*, $e_n = 1/\sqrt{\pi n!} \times (x+iy)^n$. Cela donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi n!}}\langle x^2+y^2\,,\,(x-iy)^n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi n!}}\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)(x-iy)^n e^{-x^2-y^2}\,dxdy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n!}}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,d\theta \times \int_0^{\infty} r^{n+3}e^{-r^2}\,dr\,.\end{aligned}$$

Ce produit scalaire est nul dès que $n > 0$; pour $n = 0$, il vaut

$$2\sqrt{\pi}\int_0^{\infty} r^3 e^{-r^2} dr = \int_0^{\infty} ue^{-u}\,du = \sqrt{\pi}$$

La projection orthogonale sur V de la classe de $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ est donc la classe de $\sqrt{\pi}e_0$, soit la classe de

$$(x,y) \longmapsto 1\,.$$

Pour la seconde fonction, on remarque que

$$4ixy = (x+iy)^2 - (x-iy)^2\,;$$

la projection orthogonale de $(x,y) \longmapsto 4ixy$ est donc $(x,y) \longmapsto (x+iy)^2$ puisque

$$(x-iy)^2 \perp V$$

comme on le voit immédiatement du fait que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x-iy)^2 (x-iy)^n e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} e^{-i(n+2)\theta}\, d\theta \times \int_0^{\infty} r^{n+3} e^{-r^2}\, dr = 0$$

pour tout $n \geq 0$.

II.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série*

$$\Big[\frac{u_n}{\sqrt{n!}}\, z^n\Big]_{n\geq 0}$$

est absolument convergente et sa somme $S(z)$ vérifie une inégalité du type

$$|S(z)| \leq C e^{|z|^2/2} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

pour une certaine constante positive C indépendante de z (que l'on précisera en fonction de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$). En déduire[1] que si $\dot{f} \in V$, $\dot{f}$ admet pour représentant dans $\mathbb{R}^2$ une fonction de la forme

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)^n\,,$$

où le rayon de convergence de la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ vaut $+\infty$ et

$$|f(x,y)| = O(e^{\frac{x^2+y^2}{2}})$$

lorque (x,y) tend vers l'infini dans $\mathbb{R}^2$.

Si z est un nombre complexe et N un entier positif, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{|u_n|}{\sqrt{n!}} |z|^n &\leq \|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 \times \Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^{2n}}{n!}\Big)^{1/2} \\ &\leq \|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 \times \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!}\Big)^{1/2} = \|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 \times e^{\frac{|z|^2}{2}}\,.\end{aligned}$$

[1] On rappelle que si $(\dot{f}_N)_{N\geq 0}$ est une suite d'éléments de H convergeant dans H vers un élément $\dot{f}$, alors on peut extraire de la suite de représentants $(f_N)_{N\geq 0}$ une sous-suite convergeant presque partout (au sens de Lebesgue) vers un représentant f de $\dot{f}$; ce résultat sera admis ici.

Il en résulte que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, la série $[u_n z^n/n!]_{n\geq 0}$ est absolument convergente et que la somme $S(z)$ de cette série est majorée en module par $C\exp(|z|^2/2)$, où C désigne la norme l^2 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si maintenant $\dot{f}\in V$, on sait que l'on peut écrire

$$\dot{f} = \lim_{\substack{N\to+\infty \\ H}} \sum_{n=0}^{N} \langle \dot{f}\,,\, e_n\rangle\, e_n\,,$$

où e_n désigne la classe de

$$(x,y)\longmapsto \frac{(x+iy)^n}{\sqrt{\pi\, n!}}\,.$$

La suite de terme général

$$u_n = \langle \dot{f}\,,\, e_n\rangle\,,\ n\in\mathbb{N}\,,$$

est dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une base hilbertienne de H. D'après le rappel, on peut extraire de la suite de classes de fonctions $(\dot{f}_N)_{N\geq 0}$, où

$$f_N(x,y) := \sum_{n=0}^{N} u_n \frac{(x+iy)^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n!}}$$

une sous-suite convergent presque partout vers un représentant de $\dot{f}$. Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la série de terme général

$$\frac{u_n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n!}}\,(x+iy)^n$$

est convergente d'après ce qui précède vers une fonction f vérifiant une inégalité

$$|f(x,y)|\leq C e^{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

et la série entière $[u_n z^n/\sqrt{\pi}\sqrt{n}!]_{n\geq 0}$ a donc bien un rayon de convergence infini. Cette fonction f est un représentant de $\dot{f}$ (si l'on admet le rappel du cours d'intégration mentionné).

II.4. *Montrer que pour tout $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $(x,y)\longmapsto e^{(X-iY)(x+iy)}$ définit un élément de V et que si $\dot{f}\in V$, on a, pour presque tout $X,Y\in\mathbb{R}^2$,*

$$\pi f(X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, e^{(X+iY)(x-iy)}\, e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \Big\langle \dot{f}(x,y)\,,\, e^{(X-iY)(x+iy)}\Big\rangle.$$

Si l'on prend un point $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction

$$(x, y) \longmapsto \exp[(X - iY)(x + iy)]$$

définit un élément de H car, si l'on pose $K = K(X, Y) := \sqrt{X^2 + Y^2}$,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} \Big|\exp[(X - iY)(x + iy)]\Big|^2 e^{-x^2-y^2} dxdy &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} e^{K\sqrt{x^2+y^2}} e^{-x^2-y^2}\, dxdy \\ &\leq 2\pi \int_0^\infty r e^{Kr-r^2}\, dr < +\infty\,.\end{aligned}$$

Prenons maintenant un élément $\dot{f}$ de H. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la fonction dominante étant

$$(x, y) \longmapsto |f(x, y)| e^{-(x^2+y^2)/2} \times (e^{K\sqrt{x^2+y^2}} e^{-(x^2+y^2)/2}),\ K = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

(qui est une fonction intégrable comme produit de deux éléments de l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2, dxdy)$), on peut affirmer

$$\begin{aligned}&\lim_{N \to +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \Big(\sum_{n=0}^N \frac{[(x - iy)(X + iY)]^n}{n!} \Big)\, e^{-x^2-y^2}\, dxdy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{(X+iY)(x-iy)}\, e^{-x^2-y^2}\, dxdy \\ &= \Big\langle \dot{f}(x, y)\,,\, e^{(X-iY)(x+iy)} \Big\rangle\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Si l'on prend $\dot{f}$ dans $V^\perp$, on voit que ceci implique

$$\langle \dot{f}(x, y)\,,\, e^{-(X-iY)(x+iy)} \rangle = 0\,,$$

ce qui prouve que $(x, y) \longmapsto e^{(X-iY)(x+iy)}$ définit un élément de H orthogonal à $V^\perp$, donc un élément de V.

Prenons maintenant $\dot{f}$ dans V. On a vu dans la question **II.4** que $\dot{f}$ avait pour représentant la fonction

$$(X, Y) \longmapsto \sum_{n=0}^\infty \langle \dot{f}\,,\, e_n \rangle \frac{(X + iY)^n}{\sqrt{\pi n!}}\,.$$

Or on a, pour (X, Y) fixé dans $\mathbb{R}^2$ et N dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N \langle \dot{f}\,,\, e_n \rangle \frac{(X + iY)^n}{\sqrt{\pi n!}} &= \Big\langle \dot{f}\,,\, \sum_{n=0}^N \frac{e_n}{\sqrt{\pi n!}} (X - iY)^n \Big\rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \Big\langle \dot{f}(x, y)\,,\, \sum_{n=0}^N \frac{[(x + iy)(X - iY)]^n}{n!} \Big\rangle \\ &\qquad (2)\end{aligned}$$

(par antilinéarité du produit scalaire à droite). Si l'on combine maintenant les résultats (1) et (2) et que l'on fasse tendre N vers l'infini, on déduit bien la formule voulue (pour presque tout (X, Y)).