Master Professionnel C.S.I

Module CODES ET SIGNAL

Épreuve théorique (Année 2003-2004), 1h30

On considère un signal digital $\{S(1), ..., S(1024)\}$ de longueur 1024 que l'on traite avec le lemme de décomposition (*splitting lemma*) associé à une analyse multi-résolution (de père φ), les fonctions

$$\begin{aligned} m_0 : &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h(n) e^{-int} \\ m_1 : &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum g(n) e^{-int}, \end{aligned}$$

vérifiant $|m_0|^2 + |m_1|^2 \equiv 1$ et étant telles que l'essentiel de la "masse" de $|m_0|^2$ se trouve répartie sur $[0, \pi]$ tandis que l'essentiel de la masse de $|m_1|^2$ se trouve répartie sur l'intervalle complémentaire $[\pi, 2\pi]$.

1. On itère 4 fois l'algorithme basé sur le lemme de décomposition ; de combien de bases orthonormées dispose-t'on alors pour décomposer le signal

$$t \to s(t) := \sum_{k=1}^{1024} S(k) \varphi(t-k)\,?$$

On note $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_M$ ces diverses bases orthonormées.

2. Expliquer ce qu'est l'entropie de Shannon et le principe qui guide vers la selection d'une "meilleure base" parmi les diverses bases orthonormées $\mathcal{B}_j$ que fournit le lemme de décomposition appliqué quatre fois pour décomposer s.

3. On représentera comme dans le cours sur un tableau à 1024 colonnes et 5 lignes (la première ligne figurant la liste des valeurs $S(1), ..., S(1024)$ du signal digital) le résultat de la décomposition (permettant de figurer les diverses décompositions possibles) et l'on marquera les cases qui correspondent aux composantes du signal digital S de fréquences appartenant respectivement aux bandes $\pi/4 \leq |\omega| \leq 3\pi/8$ et $\pi/2 \leq |\omega| \leq 3\pi/4$.

4. On suppose que $\widetilde{S}$ est la somme du signal S et d'une "signature" Σ dont le contenu fréquentiel vit dans la bande $\pi/4 \leq |\omega| \leq 3\pi/8$. Expliquez comment l'algorithme ci-dessus (appliqué à $S + \Sigma$) permet d'isoler Σ pourvu que l'on connaisse *a priori* la décomposition de S dans une (judijieusement choisie) des bases orthonormées de la liste $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_M$ (on précisera comment choisir cette base et de combien de choix l'on dispose).

5. On répéte l'étude cette fois sur une image I de taille 1024×1024 sur laquelle on fait agir 4 fois le lemme de décomposition (l'analyse multi-résolution restant la même). On représente (comme dans le cours) le résultat de la décomposition sur un tableau 1024×1024.

- matérialisez sur l'image où sont les coefficients correspondant à la décomposition en ondelettes de I ;
- matérialisez sur l'image où lire les coefficients d'ondelette correspondant aux détails obliques de l'image à l'echelle 2^0, à l'échelle 2^1, à l'échelle 2^2 ;
- si l'on suppose que l'image I est "signée" par une signature Σ dont le contenu fréquentiel habite dans

  $$\{(\omega_1, \omega_2)\,;\, \pi/4 \leq |\omega_1| \leq 3\pi/8\,,\, \pi/2 \leq |\omega_2| \leq 9\pi/16\}\,,$$

  indiquez, une fois décomposée $I + \Sigma$ avec quatre itérations du lemme de décomposition, dans quelle zone du tableau il convient de rechercher les coefficicients relatifs à la signature Σ.

6. Expliquez le principe de compression d'image **JPEG** et comparez (avantages, inconvénients) aux algorithmes de compression d'image basés sur le lemme de décomposition couplé avec un critère d'entropie.

7. Proposez une démarche du type *watermarking* inspiré de la décomposition des images basé sur le lemme de décomposition ; on rappelle que le procédé de *watermarking* consiste en la signature des images et en la mise en place d'un système d'authenfication ; il est important que la signature "résiste" au plus grand nombre de transformations "usuelles". L'orthogonalité de la décomposition est-elle un atout par rapport à une décomposition redondante ?