DESS Codes, Cryptologie, Sécurité Informatique
Année 2005-2006
Vendredi 16 Décembre 2005

UE MAI933 (Codes/Signal)

<u>Epreuve de théorie du signal</u>

(notes de cours autorisées)

Partie I (autour de la compression)

I.a. On souhaite comprimer une image digitale I *via* le calcul de sa transformée en cosinus $\widehat{I}$. Dans quelle zone de $\widehat{I}$ peut on mettre à zéro des pixels dont la brillance est inférieure à un seuil donné sans risquer d'affecter la lecture ultérieure de l'image I ? Préciser pourquoi mettre à zéro des pixels de brillance petite dans d'autres zones pourrait affecter (et de quelle manière) la lecture de l'image. Si l'on souhaite inscrire une *watermark* sur l'image *via* le calcul de sa transformée en cosinus $\widehat{I}$, dans quelle zone de $\widehat{I}$ est-il raisonnable d'inscrire le *watermark* ? Préciser pourquoi.

I.b. Décrire le principe de l'algorithme de compression JPEG.

I.c. Après avoir rappelé la définition de l'entropie de Shannon d'une information dans une base orthonormée donnée, expliquer pourquoi il est intéressant de disposer d'une base orthonormée dans laquelle cette entropie soit minimale.

I.d. Décrire le principe des algorithmes du type JPEG2000.

Partie II. Autour du filtrage

II.a. On considère un filtre analogique rationnel $\mathcal{L}$ de fonction de transfert

$$F(p) := \frac{1}{p^2+p+1}\,;$$

un tel filtre est-il stable ? Calculer sa réponse impulsionnelle après avoir décomposé en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) cette fraction rationnelle.

II.b. Existe-t'il un filtre analogique rationnel $\mathcal{L}_1$ tel que $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$?

II.c. Construire le filtre rationnel digital L déduit de $\mathcal{L}$ *via* la transformation bilinéaire normalisée

$$p = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\,.$$

S'agit-il d'un filtre AR ? d'un filtre ARMA ? Donner explicitement les relations entre un signal digital d'entrée $(e(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ et le signal digital de sortie $(s(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ après passage à travers le filtre digital rationnel L. Le filtre digital rationnel L est-il stable ?

Partie III. Transformations temps-échelles

III.a. Soit $(h(0),...,h(M))$ une suite de nombres réels (que l'on prolonge par 0 pour en faire une suite indexée par $\mathbb{Z}$) et

$$m_0 \ : \omega \longmapsto \sum_{k=0}^{M} h(k)\, e^{-ik\omega}$$

le polynôme trigonométrique correspondant (m_0 est par définition la transformée de Fourier du filtre digital de réponse impulsionnelle la suite indexée par $\mathbb{Z}$ $(...,0,...,0,h(0),...,h(M),0,...)$). L'opération R qui à un signal digital d'entrée $(e(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ associe le signal $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$s(k) = \sum_l h(l-2k)e(l)$$

est-elle un filtre ? Décrire explicitement l'opération R^* adjointe de l'opération R.

III.b. Si $e = (e(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite discrète et

$$\widehat{e} \ : \ \omega \longmapsto \sum_k e(k)\, e^{-ik\omega}$$

sa transformée de Fourier, exprimer en fonction de m_0 et de $\widehat{e}$ la transformée de Fourier de la suite $R^*[e]$. Sous quelle condition (portant sur la fonction m_0) la transformation R^* est-elle inversible ? Est-ce le cas si l'on a $h(0)+\cdots+h(M) = 0$?

III.c. Si $e = (e(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite discrète et

$$\widehat{e} \ : \ \omega \longmapsto \sum_k e(k)\, e^{-ik\omega}$$

sa transformée de Fourier, exprimer en fonction de m_0 et de $\widehat{e}$ la transformée de Fourier de la suite $R[e]$, puis celle de $R^* \circ R[e]$.

III.d. Comment doivent être couplées deux suites $(h(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(g(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ pour générer un algorithme de décomposition temps-échelles ? Expliquez le principe (et l'intérêt) d'un tel algorithme, d'abord en $1D$, puis en $2D$. Comment l'algorithme de "meilleure base" de V. Wickerhauser basé sur le *splitting lemma* lui est-il relié ?

III.e. Expliquez brièvement le principe de l'algorithme pyramidal. Examiner ensuite l'image proposée sur la page suivante, d'abord de près, puis en vous reculant de quelques mètres. Que constatez vous ? Pouvez vous relier votre constat à l'algorithme pyramidal ? Esquissez une explication du phénomène que vous observez.