ANNÉE 2003-2004 SESSION DE JANVIER 2004

GU : MIAS 3, MIAS 2', IUP MIAGE **UE** : 301 M ANAL

Date : Lundi 12 Janvier 2004, 11.00-12.30 Durée : 1 h 30

Documents non autorisés

Indication de barème : les exercices 1 et 4 sont notés sur 6 points, l'exercice 2 sur 4 points, l'exercice 3 sur 8 points ; le total T (inférieur ou égal à 24) sera reporté comme une note sur 20 (si $T \geq 20$, la note finale sera donc 20/20). Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Deux relèvent du cours d'analyse (exercices 1 et 4), deux du cours d'algèbre (exercices 2 et 3).

Exercice 1 (analyse)

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\left[\frac{(-1)^n z^n}{n!\,(n+x)}\right]_{n\geq 0}$?

2. Montrer que la fonction

$$g \ : x \in]0,+\infty[\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}$$

est une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ (on énoncera clairement le théorème du cours invoqué ici).

3. Montrer que la fonction

$$x \in]0,+\infty[\to xg(x) - g(x+1)$$

est constante sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2 (algèbre)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et T un opérateur symétrique de E dans lui-même dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note $\langle\, ,\, \rangle$ le produit scalaire sur $E \times E$ conférant à E sa structure euclidienne.

1. Montrer que $(\vec{V},\vec{W}) \to \langle \vec{V}\, ,\, T(\vec{W})\rangle$ est un autre produit scalaire (noté $\langle\langle\, ,\, \rangle\rangle$) sur $E \times E$.

2. Montrer que

$$\forall \vec{V} \in E\, ,\ \forall \vec{W} \in E\, ,\ \left|\langle \vec{V}\, ,\, T(\vec{W})\rangle\right| \leq \sqrt{\langle \vec{V}\, ,\, T(\vec{V})\rangle} \times \sqrt{\langle \vec{W}\, ,\, T(\vec{W})\rangle}\, ; \quad (*)$$

à quelle condition (sur $\vec{V}$ et $\vec{W}$) l'inégalité (*) devient elle une égalité ?

Exercice 3 (algèbre)

Soit E_2 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et Q la forme quadratique

$$Q\ : P \to \int_{-1}^{1} (P(t))^2 dt - P(0)P(1)\,.$$

1. Exprimer la matrice de Q dans la base $\{1, t, t^2\}$ de E_2 (on exprimera $Q(P)$ si $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ en fonction de a_0, a_1, a_2).

2. Construire une base (f_0, f_1, f_2) de E_2 et des nombres réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que

$$\forall\, (A_0, A_1, A_2) \in \mathbb{R}^3\,,\ Q(A_0 f_0 + A_1 f_1 + A_2 f_2) = \lambda_0 A_0^2 + \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2.$$

3. Quelle est la signature de Q ?

Exercice 4 (analyse)

Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ deux série entières de rayon de convergence $R > 0$; on note S et T les sommes de ces deux séries dans $D(0, R)$.

1. Calculer, pour tout $r \in]0, R[$, les listes des coefficients de Fourier complexes des fonctions 2π-périodiques

$$\begin{aligned} \theta \in \mathbb{R} \quad &\to \quad S(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ \theta \in \mathbb{R} \quad &\to \quad T(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}\,. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $r \in [0, R[$, la série numérique $[a_n \overline{b_n} r^{2n}]_{n\geq 0}$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}\, r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) \overline{T(re^{i\theta})}\, d\theta\,.$$

ANNÉE 2003-2004 SESSION DE JANVIER 2004

GU : MIAS 3, MIAS 2', IUP MIAGE **UE** : 301 M ANAL

Date : Lundi 12 Janvier, 11.00-12.30 Durée : 1h30

CORRIGE

Corrigé de l'exercice 1.

1. On utilise pour calculer le rayon de convergence de cette série la règle de d'Alembert ; en effet

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+x)}{(n+1)!(n+1+x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+x}{(n+1)(n+1+x)}=0\,;$$

le rayon de convergence de cette série entière vaut donc $+\infty$.

2. Pour tout $x>0$, la série numérique $\left[\frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}\right]_{n\geq 0}$ est convergente (la série entière $\left[\frac{(-1)^n z^n}{n!\,(n+x)}\right]_{n\geq 0}$ converge en $z=1$ puisque le rayon de convergence de cette série est $R=\infty>1$). D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, la dérivée de la fonction

$$x\in]0,+\infty[\to\frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}$$

est la fonction

$$x\in]0,\infty[\to\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+x)^2}$$

et pour tout $\epsilon>0$, on a

$$\sup_{x\in]\epsilon,+\infty[}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+x)^2}\right|\leq\frac{1}{n!\,(n+\epsilon)^2}\ ;$$

comme la série numérique

$$\left[\frac{1}{n!\,(n+\epsilon)^2}\right]_{n\geq 0}$$

est une série convergente (u_{n+1}/u_n tend vers $0<1$ lorsque n tend vers l'infini), la série de fonctions $\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+x)^2}\right]_{n\geq 0}$ converge normalement sur $]\epsilon,+\infty[$. Le théorème de dérivation terme-à-terme des séries s'applique donc et la fonction

$$x\in]\epsilon,+\infty[\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}$$

est dérivable sur $]\epsilon, +\infty[$, de dérivée la fonction

$$x \in]\epsilon, +\infty[\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+x)^2}\,;$$

cette dernière fonction est continue (somme d'une série normalement convergente de fonctions continues) et la fonction

$$x \in]0, +\infty[\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!\,(n+x)}$$

est bien de classe C^1 sur $]\epsilon, +\infty$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, cette fonction est en fait de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction

$$x \to xg(x) - g(x+1)$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$x \to g(x) + xg'(x) - g'(x+1)\,.$$

Cette dérivée vaut (d'après l'expression de $g'(x)$ donné au **2**)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)} - x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n+1)^2} \\
= \;& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!(n+x)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n+1)^2} \\
= \;& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+x)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n+1)^2} \\
= \;& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n+1)^2} \\
= \;& 0\,,
\end{aligned}$$

ce qui montrer que la fonction $x \to xg(x) - g(x+1)$ est en fait constante.

Corrigé de l'exercice 2.

1. L'application

$$(\vec{V}\,,\, \vec{W}) \to \langle \vec{V}\,,\, T(\vec{W})\rangle \tag{$\dagger$}$$

est bilinéaire : en effet

$$\langle \vec{\lambda}_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2\,,\, T(\vec{W})\rangle = \lambda_1 \langle \vec{V}_1\,,\, T(\vec{W})\rangle + \lambda_2 \langle \vec{V}_2\,,\, T(\vec{W})\rangle$$

d'après la linéarité du produit scalaire à gauche. d'autre part

$$\begin{aligned}\langle \vec{V}\,,\, T(\lambda_1 \vec{W}_1 + \lambda_2 \vec{W}_2)\rangle &= \langle \vec{V}\,,\, \lambda_1 T(\vec{W}_1) + \lambda_2 T(\vec{W}_2)\rangle \\ &= \lambda_1 \langle \vec{V}\,,\, T(\vec{W}_1)\rangle + \lambda_2 \langle \vec{V}\,,\, T(\vec{W}_2)\rangle\end{aligned}$$

d'après la linéarité de T et la linéarité du produit scalaire à droite.
Le fait que T soit symétrique se lit

$$\forall \vec{V}\,,\ \vec{W} \in E\,,\ \langle \vec{V}\,,\, T(\vec{W})\rangle = \langle T(\vec{V})\,,\, \vec{W}\rangle\,;$$

on a donc

$$\forall \vec{V}\,,\ \vec{W} \in E\,,\ \langle \vec{V}\,,\, T(\vec{W})\rangle = \langle \vec{W}\,,\, T(\vec{V})\rangle\,,$$

ce qui prouve que la forme bilinéaire (†) est symétrique.
Le fait que T soit symétrique implique aussi que T soit diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$. Si $n = \dim E$, soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une telle base orthonormée, avec $T(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$, $j = 1, ..., n$, les nombres λ_j étant par hypothèses tous strictement positifs. Si

$$\vec{V} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n\,,$$

on a

$$\langle \vec{V}\,,\, T(\vec{V})\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 \geq 0\,,$$

ce qui montre que la forme quadratique Q correspondant à la forme bilinéaire $(\vec{V}, \vec{W}) \to \langle \vec{V}\,,\, T(\vec{W})\rangle$ est bien positive. Enfin

$$\langle \vec{V}\,,\, T(\vec{V})\rangle = 0$$

implique

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 = 0\,,$$

ce qui implique bien, puisque tous les λ_j sont strictement positifs, $x_1 = \cdots = x_n = 0$, donc $\vec{V} = 0$. La forme quadratique Q est donc bien aussi définie et

$$(\vec{V}\,,\, \vec{W}) \to \langle \vec{V}\,,\, T(\vec{W})\rangle$$

est un produit scalaire sur E.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée cette fois pour le produit scalaire $\langle\langle\, ,\, \rangle\rangle$), on a

$$\left|\langle\langle \vec{V}\,,\, \vec{W}\rangle\rangle\right| \leq \sqrt{\langle\langle \vec{V}\,,\, \vec{V}\rangle\rangle} \times \sqrt{\langle\langle \vec{W}\,,\, \vec{W}\rangle\rangle}\,,$$

ce qui est exactement l'inégalité requise. Cette inégalité devient une égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont liés.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Soit $P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ un élément de E_2. On a, puisque les intégrales de t et t^3 sur $[-1,1]$ sont nulles,

$$\begin{aligned}
Q(P) &= \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt - a_0(a_0 + a_1 + a_2) \\
&= \int_{-1}^{1} \left(a_0^2 + a_1^2 t^2 + a_2^2 t^4 + 2a_0 a_2 t^2\right) dt - a_0(a_0 + a_1 + a_2) \\
&= 2a_0^2 + \frac{2}{3}(a_1^2 + 2a_0 a_2) + \frac{2}{5}a_2^2 - a_0(a_0 + a_1 + a_2) \\
&= a_0^2 + \frac{2}{3}a_1^2 + \frac{2}{5}a_2^2 - a_0 a_1 + \frac{1}{3}a_0 a_2 \,.
\end{aligned}$$

La matrice de Q dans la base $\{1, t, t^2\}$ est donc, par identification

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} .$$

2. On utilise l'algorithme de Gauss pour réduire la forme quadratique Q. Si $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, on a

$$\begin{aligned}
Q(P) &= \left(a_0 + \frac{1}{2}\Big[\frac{a_2}{3} - a_1\Big]\right)^2 - \frac{1}{4}\Big(a_1^2 + \frac{a_2^2}{9} - \frac{2}{3}a_1 a_2\Big) + \frac{2}{3}a_1^2 + \frac{2}{5}a_2^2 \\
&= \left(a_0 + \frac{1}{2}\Big[\frac{a_2}{3} - a_1\Big]\right)^2 + \frac{5}{12}a_1^2 + \frac{67}{180}a_2^2 + \frac{a_1 a_2}{6} \\
&= \left(a_0 + \frac{1}{2}\Big[\frac{a_2}{3} - a_1\Big]\right)^2 + \frac{5}{12}\Big(a_1 + \frac{a_2}{5}\Big)^2 - \frac{a_2^2}{60} + \frac{67}{180}a_2^2 \\
&= \left(a_0 + \frac{1}{2}\Big[\frac{a_2}{3} - a_1\Big]\right)^2 + \frac{5}{12}\Big(a_1 + \frac{a_2}{5}\Big)^2 + \frac{16}{45}a_2^2 \,.
\end{aligned}$$

Si l'on effectue le changement de coordonnées :

$$\begin{aligned}
A_0 &:= a_0 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6} \\
A_1 &:= a_1 + \frac{a_2}{5} \\
A_2 &:= a_2 \,,
\end{aligned}$$

on voit que dans les nouvelles coordonnées (A_0, A_1, A_2), l'expression de Q est de la forme

$$Q(P) = A_0^2 + \frac{5}{12}A_1^2 + \frac{16}{45}A_2^2$$

et est sont de la forme voulue. Les vecteurs f_0, f_1, f_2 sont les éléments de E_2 de coordonnées respectives $(A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 0)$, $(A_0 = 0, A_1 = 1, A_2 =$

0), $(A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 1)$. On a donc, pour f_0, $a_1 = a_2 = 0$ et $a_0 = 1$, ce qui donne $f_0 = 1$; pour f_1, on a toujours $a_2 = 0$, mais cette fois $a_1 = 1$ et $a_0 = 1/2$, d'où $f_1 = 1/2 + t$; enfin on trouve, pour f_2, $a_2 = 1$, $a_1 = -1/5$, $a_0 = a_1/2 - a_2/6 = -1/10 - 1/6 = -4/15$, d'où $f_2 = -4/15 - t/5 + t^2$. En récapitulant, notre démarche nous conduit à

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 1/2 + t \\ f_2 &= -4/15 - t/5 + t^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 &= \frac{5}{12} \\ \lambda_2 &= \frac{16}{45}. \end{aligned}$$

Remarque. Bien sûr, il s'agit là d'un choix de (f_0, f_1, f_2) qui convient, mais une fois couplé avec $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 5/12, \lambda_2 = 16/45$; toutefois, ce choix n'a rien d'unique ! Un autre choix pour (f_0, f_1, f_2), obtenu *via* une organisation différente de la réduction de Gauss, demanderait à être couplé avec d'autres valeurs pour les scalaires λ_j. On vérifie ici assez facilement (c'est le moyen de s'assurer que les calculs sont bien corrects) que f_0, f_1, f_2 sont deux à deux orthogonaux relativement à la forme bilinéaire polarisée de Q.

3. La signature de Q est $(3, 0)$ puisque les trois nombres λ_j, $j = 0, 1, 2$, trouvés au terme de la réduction de Gauss au **2** sont tous les trois strictement positifs. La forme polarisée de Q définit donc un produit scalaire sur E_2.

Corrigé de l'exercice 4.

1. Les séries entières $[a_n z^n]_{n \geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n \geq 0}$ sont normalement convergentes sur le cercle $\{|z| = r\}$ du plan complexe lorsque $r < R$ (ce cercle est en effet à l'intérieur du disque de convergence).
Le coefficient de Fourier d'indice $k \in \mathbb{Z}$ de

$$F \ : \theta \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

vaut par définition

$$c_k(F) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) e^{-ik\theta} \, d\theta \, ;$$

du fait de la convergence normale de la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ sur le cercle $\{|z|=r\}$, la série de fonctions $[a_n r^n e^{i(n-k)\theta}]_{n\geq 0}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,2\pi]$ et l'on peut donc intervertir sommation et intégrale pour obtenir

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\,d\theta\,;$$

comme

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2\pi \text{ si } n=k \\ 0 \text{ si } n\neq k\,, \end{cases}$$

on a $c_k(F)=0$ si $k<0$ et $c_k(F)=a_k r^k$ si $k\geq 0$. Le même raisonnement pour la fonction

$$G\ :\theta \to \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta}$$

donne $c_k(G)=0$ si $k<0$ et $c_k(G)=b_k r^k$ si $k\geq 0$.

2. D'après la formule de Parseval, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{n=N} c_n(F)\overline{c_n(G)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\overline{G(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})\overline{T(re^{i\theta})}\,d\theta\,.$$

On a donc, puisque $c_k(F)=c_k(G)=0$ si $k<0$ et $c_k(F)=a_k r^k$ si $k\geq 0$, $c_k(G)=b_k r^k$ si $k\geq 0$,

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n\overline{b_n}r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})\overline{T(re^{i\theta})}\,d\theta\,.$$

Ceci montre la convergence de la série numérique $[a_n\overline{b_n}r^{2n}]_{n\geq 0}$ et fournit en même temps la valeur de la somme de cette série.