ANNÉE 2003-2004 SESSION DE JANVIER 2004

GU : MIAS 3, MIAS 2', IUP MIAGE **UE** : 301 M ALG

Date : Mardi 13 Janvier 2004, 8.30-11.30 Durée : 3 h.

Documents non autorisés

Indication de barème : l'exercice d'analyse sera noté sur 10 points, chaque partie du problème d'algèbre sur 8 points, le total $T \leq 26$ étant considéré comme une note sur 20 (si $T \geq 26$, la note finale sera donc 20/20). Les deux parties du problème d'algèbre sont liés mais les résultats de la première partie peuvent être admis pour traiter la seconde. Les questions du problème d'algèbre s'enchaînent et l'on pourra éventuellement admettre les conclusions de certaines puis poursuivre.

Exercice d'analyse

1. On considère la série de fonctions $[f_k]_{k\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$, f_k désignant la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f_k \ : t \to \frac{\cos(kt) + k\sin(kt)}{1+k^2}\,;$$

en utilisant des critères du cours que l'on citera soigneusement (en précisant bien comment ils s'appliquent), montrer que la série de fonctions $[f_k]_{k\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Soit F la fonction 2π-périodique définie par

$$F(t) = \exp(-t)$$

pour $t \in [0, 2\pi[$ et prolongée ensuite par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$ tout entier.

- **a.** Calculer, pour $k \in \mathbb{Z}$, la valeur du coefficient de Fourier complexe

$$c_k(F) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-ikt}dt\,.$$

- **b.** Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme partielle de Fourier de F, définie, on le rappelle, comme la fonction $S_n[F] \ : t \to \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(F)e^{ikt}$, vaut au point $t \in \mathbb{R}$

$$S_n[F](t) = \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kt)+k\sin(kt)}{1+k^2}\right).$$

3. Montrer que la somme de la série de fonctions $[f_k]_{k\geq 1}$ est la fonction 2π-périodique G définie par

$$G(t) := \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{1-e^{-2\pi}}e^{-t} - 1\right)$$

si $t \in]0, 2\pi[$ et

$$G(0) = \frac{1}{2}\left(\pi\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} - 1\right).$$

4. La convergence de la série de fonctions $[f_k]_{k\geq 1}$ est-elle uniforme sur $[0, 2\pi]$?

<u>Problème d'algèbre</u>

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n ; on notera $\langle\, , \rangle$ le produit scalaire sur $E \times E$ et, pour tout vecteur $\vec{V}$ de E,

$$\|\vec{V}\| := \sqrt{\langle \vec{V} \, , \, \vec{V} \rangle}\,.$$

Question préliminaire. Montrer que si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs de E, $\|\vec{V}+\vec{W}\| \leq \|\vec{V}\| + \|\vec{W}\|$.

Partie I.

I.1. Soit T un opérateur linéaire de E dans E ; rappeler comment est défini l'opérateur linéaire adjoint T^*.

I.2. Soit P l'opérateur de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de E.

- **I.2.a.** Montrer que l'on a

$$\forall \vec{V} \in E\,,\ \|P(\vec{V})\| \leq \|\vec{V}\|\,.$$

- **I.2.b.** Montrer que

$$\forall \vec{V}, \vec{W} \in E\,,\ \langle \vec{V} \, , \, P(\vec{W}) \rangle = \langle P(\vec{V}) \, , \, \vec{W} \rangle$$

  et en déduire que P est un opérateur symétrique.

I.3. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension k et P l'opérateur de projection orthogonale sur F, montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que que

$$M_{P,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{pmatrix}\,, \qquad (*)$$

où I_k désigne la matrice identité $k \times k$ et $0_{p,q}$ la matrice nulle à p lignes et q colonnes ; si l'on dispose d'une base $\mathcal{B}_0$ de E dont les k premiers vecteurs sont dans F, quel algorithme utilise t'on pour construire à partir de $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de P soit de la forme (*) ?

I.4. Soit T un opérateur linéaire de E dans lui-même.

- **I.4.a.** Montrer, en utilisant la définition de l'adjoint, que tout vecteur $\vec{V}$ de la forme $\vec{V} = T^*(\vec{U})$ avec $\vec{U} \in E$ est orthogonal au noyau de T ; en déduire que l'on a l'inclusion ensembliste $\operatorname{Im} T^* \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

- **I.4.b.** Comment sont reliées les matrices de T et T^* dans une même base orthonormée $\mathcal{B}$? Montrer que $\operatorname{rang}(T) = \operatorname{rang}(T^*)$.

- **I.4.c.** En utilisant le résultat établi au **I.4.a** avec l'opérateur T^* à la place de T, montrer que $\operatorname{Im} T \subset (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$; montrer ensuite, en utilisant l'égalité des rangs de T et T^*, que l'on a en fait l'égalité $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$; en déduire que l'on a pour l'espace E la décomposition orthogonale
$$E = \operatorname{Im} T \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} T^* .$$

Partie II. On considère N sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_N$ de E et l'on note $P_1, ..., P_N$ les opérateurs de projection orthogonale respectivement sur $F_1, ..., F_N$, puis $Q := P_N \circ \cdots \circ P_1$; on note aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$Q^k := Q \circ \cdots \circ Q \ (k \text{ fois}) .$$

II.1. En utilisant **I.2.a**, montrer que, si $\vec{V}$ est un vecteur de E, on a

$$\|Q(\vec{V})\| \leq \|P_1(\vec{V})\| \leq \|\vec{V}\| ;$$

en déduire que si $\vec{V} \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - Q)$, alors $\|P_1(\vec{V})\| = \|\vec{V}\|$; montrer qu'un tel vecteur $\vec{V}$ vérifie $P_1(\vec{V}) = \vec{V}$.

II.2. Montrer que si $\vec{V} \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - Q)$, alors

$$P_1(\vec{V}) = P_2(\vec{V}) = \cdots = P_N(\vec{V}) = \vec{V} .$$

En conclure que l'on a l'inclusion

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - Q) \subset F_1 \cap \cdots \cap F_N ;$$

prouver que l'on a aussi l'inclusion

$$F_1 \cap \cdots \cap F_N \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - Q)$$

et par conséquent l'égalité

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - Q) = F_1 \cap \cdots \cap F_N .$$

II.3. Montrer, en utilisant le résultat établi en **I.2.b**, que $(\mathrm{Id}_E - Q)^* = \mathrm{Id}_E - (P_1 \circ \cdots \circ P_N)$ et en conclure

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q)^* = F_N \cap \cdots \cap F_1 = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q)\,.$$

II.4. Soit $\vec{U}$ un vecteur de E. Montrer que la suite numérique $(\|Q^k(\vec{U})\|)_{k\geq 1}$ est une suite de nombres positifs décroissante; en déduire que cette suite est convergente vers une limite $a(\vec{U})$.

II.5. Soit $V = (\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U})$ un vecteur de $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - Q)$; on suppose dans un premier temps que $a(\vec{U}) > 0$.

- **II.5.a.** Montrer que si $\vec{u}_k := Q^k(\vec{U})/\|Q^k(\vec{U})\|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\|\vec{u}_k\| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \|Q(\vec{u}_k)\| = 1$.

- **II.5.b.** En utilisant le théorème de Pythagore, déduire de **II.5.a** que
$$\lim_{k\to\infty} \|(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{u}_k)\| = 0\,.$$

- **II.5.c.** Montrer que, pour tout $k \geq k_0$,
$$Q^k(\vec{V}) = (\mathrm{Id}_E - Q)(Q^k(\vec{U})) = \|Q^k(\vec{U})\| \times (\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{u}_k)$$
et en déduire
$$\lim_{k\to\infty} \|Q^k(\vec{V})\| = 0$$
(on commencera par montrer $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1(\vec{u}_k) - Q(\vec{u}_k)\| = 0$, puis on reprendra l'idée avec $\widetilde{Q} = P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1$ à la place de Q).

- **II.5.d.** Soit $\vec{V} = (\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U})$ tel que $a(\vec{U}) = 0$; montrer que dans ce cas encore
$$\lim_{k\to\infty} \|Q^k(\vec{V})\| = 0\,.$$

II.6. On note P la projection orthogonale sur le sous-espace $F_1 \cap \cdots \cap F_N$.

- **II.6.a.** Montrer que si $\vec{V}$ appartient à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q) = F_1 \cap \cdots \cap F_N$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$Q^k(\vec{V}) = P(\vec{V}) = \vec{V}\,.$$

- **II.6.b.** Montrer que si $\vec{V}$ est dans $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - Q)$, on a $P(\vec{V}) = \vec{0}$.

- **II.6.c.** En utilisant le fait que l'espace E s'écrive comme somme directe de $F_1 \cap \cdots \cap F_N$ et de son orthogonal, déduire de **II.5**, de **II.6.a** et de **II.6.b** que, pour tout vecteur $\vec{V}$ de E, on a
$$\lim_{k\to\infty} \|Q^k(\vec{V}) - P(\vec{V})\| = 0\,.$$

ANNÉE 2003-2004 SESSION DE JANVIER 2004

GU : MIAS 3, MIAS 2', IUP MIAGE **UE** : 301 M ALG

Date : Mardi 13 Janvier 2004, 8.30-11.30 Durée : 3 h.

CORRIGE

Corrigé de l'exercice 1.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{\cos(kt)}{1+k^2}\right| \leq \frac{1}{1+k^2}\,;$$

comme la série numérique $[1/(1+k^2)]_{k\geq 1}$ est convergente (le terme général est équivalent à $1/k^2$, terme général d'une série de Riemann convergente), la série de fonctions

$$\left[\frac{\cos(kt)}{1+k^2}\right]_{k\geq 1}$$

est normalement convergente, *a fortiori* simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

La série de fonctions

$$\left[\frac{k\sin(kt)}{1+k^2}\right]_{k\geq 1}$$

est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ à cause du critère d'Abel. On peut en effet supposer que $t \neq 0$ (modulo 2π), c'est-à-dire $1-e^{it} \neq 0$ (sinon, la série est la série nulle et est donc convergente). Si tel est le cas, les sommes partielles de la série numérique $[\sin(kt)]_{k\geq 1}$ sont bornées en module car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en utilisant la classique identité remarquable $1-X^n = (1-X)(1+X+X^2+\cdots+X^{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{n}\sin(kt)\Big| &= \Big|\mathrm{Im}\,\Big[\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\Big]\Big| \\
&= \Big|\mathrm{Im}\,\Big[e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\Big]\Big| \\
&\leq \Big|\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\Big| \\
&\leq \frac{2}{|1-e^{it}|}\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction

$$x \to \frac{x}{1+x^2}$$

a pour dérivée sur $[1, +\infty[$ la fonction négative

$$x \to \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

ce qui implique que la suite $(k/(1+k^2))_{k\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. Les hypothèses du critère d'Abel sont bien remplies si l'on pose

$$u_k := \frac{k}{1+k^2}$$

et

$$v_k = v_k(t) := \sin(kt)\,;$$

pour assurer en effet la convergence de la série numérique $[u_k v_k(t)]_{k\geq 1}$, il suffit que la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ tende vers 0 en décroissant et qu'il existe un nombre $M = M(t)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} v_k\Big| \leq M(t)\,,$$

ce qui est le cas ici, comme on vient de le vérifier. La série $[f_k]_{k\geq 1}$ est donc simplement convergente comme somme d'une série de fonctions normalement convergente et d'une série de fonctions simplement convergente.

2.a. On a, par un calcul immédiat, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-t(1+ik)}\,dt = -\frac{1}{2\pi(1+ik)}\Big[e^{-t(1+ik)}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\,\frac{1}{1+ik}\,.$$

2.b. En regroupant, pour $k \geq 1$, les termes $c_k(f)e^{ikt}$ et $c_{-k}(f)e^{-ikt}$, on trouve

$$\begin{aligned}
S_n[F](t) &= \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\Big(1 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{e^{ikt}}{1+ik} + \frac{e^{-ikt}}{1-ik}\Big)\Big)\\
&= \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\Big(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}+ik(e^{-ikt}-e^{ikt})}{1+k^2}\Big)\\
&= \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\Big(1 + 2\frac{\cos(k\pi)+k\sin(k\pi)}{1+k^2}\Big)
\end{aligned}$$

compte-tenu de ce que

$$\begin{aligned}
e^{ikt}+e^{-ikt} &= 2\cos(kt)\\
e^{-ikt}-e^{ikt} &= -2i\sin(kt)
\end{aligned}$$

et que $i^2 = -1$.

3. La fonction F est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et admettant en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée à gauche et à droite ; en fait la fonction F est continue sur $]0, 2\pi[$ et la demi-somme de ses limites à gauche et à droite en $t = 0$ vaut

$$\frac{1}{2}(F(0_-) + F(0^+)) = \frac{1}{2}(e^{-2\pi} + 1)\,.$$

D'après le théorème de Dirichlet, la suite $(S_n[F])_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction G définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$\widetilde{F}(t) := \frac{1}{2}(F(t_-) + F(t_+))\,;$$

ici, on a $\widetilde{F}(t) = F(t) = e^{-t}$ si $t \in]0, 2\pi[$ et

$$\widetilde{F}(0) = \frac{1}{2}(e^{-2\pi} + 1)\,.$$

On voit que si G désigne la somme de la série $[f_k]_{k\geq 1}$, on a, sur $\mathbb{R}$, l'identité (obtenue en faisant tendre n vers l'infini dans l'expression de $S_n[F]$ et en appliquant le théorème de Dirichlet) :

$$\lim_{n\to\infty} S_n[F](t) = \widetilde{F}(t) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi}\Big(1 + 2G(t)\Big)\,,$$

d'où

$$G(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{1 - e^{-2\pi}}\widetilde{F}(t) - 1\right),$$

ce qui donne les formules voulues pour $t \in]0, 2\pi[$ et $t = 0$.

4. La fonction G n'est pas continue sur $[0, 2\pi]$ (car elle n'est continue ni en $t = 0$ ni en $t = 2\pi$). Il est donc impossible que la convergence de la série de fonctions continues $[f_k]_{k\geq 1}$ soit uniforme sur $[0, 2\pi]$: une limite uniforme d'une suite de fonctions continues se devrait en effet, d'après un résultat du cours, d'être continue, ce qui n'est pas le cas ici pour la limite des sommes partielles de la série $[f_k]_{k\geq 1}$ sur $[0, 2\pi]$!

Corrigé du problème.

Question préliminaire. On a

$$\|\vec{V} + \vec{W}\|^2 = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 + 2\langle \vec{V}\,,\, \vec{W}\rangle\,.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\|\vec{V} + \vec{W}\|^2 \leq \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 + 2|\langle \vec{V}\,,\, \vec{W}\rangle| \leq \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 + 2\|\vec{V}\|\,\|\vec{W}\|\,,$$

donc

$$\|\vec{V}+\vec{W}\|^2 \leq (\|\vec{V}\|+\|\vec{W}\|)^2 ,$$

d'où l'inégalité voulue en prenant les racines carrées.

Partie I.

I.1. L'adjoint d'un opérateur T de E dans lui-même est défini par la formule d'adjonction ; c'est l'unique opérateur T^* tel que

$$\forall \vec{V},\, \vec{W} \in E,\ \langle T(\vec{V})\,,\, \vec{W}\rangle = \langle \vec{V}\,,\, T^*(\vec{W})\rangle\,.$$

I.2.a. On sait que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et que, si P désigne la projection orthogonale sur F, alors, pour tout $\vec{V}$ dans E,

$$\|\vec{V}\|^2 = \|P(\vec{V})\|^2 + \|\vec{V} - P(\vec{V})\|^2$$

puisque les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V} - P(\vec{V})$ sont orthogonaux et que l'on dispose du théorème de Pythagore dans l'espace euclidien E. On a donc

$$\|P(\vec{V})\|^2 \leq \|P(\vec{V})\|^2 + \|\vec{V} - P(\vec{V})\|^2 = \|\vec{V}\|^2 ,$$

d'où en prenant les racines carrées l'inégalité voulue.

I.2.b. Puisque $P(\vec{W}) \in F$ et $\vec{V} - P(\vec{V}) \in F^{\perp}$ sont orthogonaux dans E, on a

$$\langle \vec{V}\,,\, P(\vec{W})\rangle = \langle \vec{V} - P(\vec{V})\,,\, P(\vec{W})\rangle + \langle P(\vec{V})\,,\, P(\vec{W})\rangle = \langle P(\vec{V})\,,\, P(\vec{W})\rangle\,.$$

L'expression obtenue est donc symétrique en $\vec{V}$ et $\vec{W}$ puisque le produit scalaire est symétrique et l'on en déduit donc

$$\forall \vec{V}\,,\ \vec{W} \in E,\ \langle \vec{V}\,,\, P(\vec{W})\rangle = \langle \vec{W}\,,\, P(\vec{V})\rangle\,,$$

ce qui est l'égalité requise. Cette égalité montre (grâce à la formule d'adjonction rappelée au **I.1**) que $P = P^*$, donc que P est un opérateur symétrique.

I.3. On sait que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$. Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k)$ une base orthonormée de F (il en existe puisque le produit scalaire sur E induit une structure euclidienne sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel F) et $(\vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n)$ une base orthonormée de $F^{\perp}$ (il en existe pour la même raison). La concaténation $\mathcal{B}$ de ces deux bases fournit une base orthonormée de E puisque F et $F^{\perp}$ sont deux sous-espaces orthogonaux. De plus, on a $P(e_j) = 0$ pour $j = k+1, ..., n$ et $P(e_j) = e_j$ pour $j = 1, ..., k$, ce qui montre que $M_{P,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ est bien de la forme voulue.

C'est l'algorithme de Gram-Schmidt (appliqué à une base obtenue en complétant arbitrairement $\mathcal{B}_0$ en une base de E (ce qui est possible d'après le théorème de la base incomplète) qui permet de construire une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de P soit de la forme voulue.

I.4.a. Si $\vec{W}$ est dans le noyau de T, on a, en utilisant la formule d'adjonction,

$$\langle \vec{W}\,,\, T^*(\vec{U})\rangle = \langle T(\vec{W})\,,\, \vec{U}\rangle = \langle \vec{0}\,,\, \vec{U}\rangle = 0\,;$$

ainsi tout vecteur $\vec{V}$ de la forme $\vec{V} = T^*(\vec{U})$ (c'est-à-dire appartenant à l'image de T^*) est orthogonal au noyau de T, ce qui prouve bien l'inclusion

$$\operatorname{Im} T^* \subset (\operatorname{Ker} T)^{\perp}\,.$$

I.4.b. Si A est la matrice de T dans une base orthonormée, la matrice de T^* dans cette même base est la transposée de A. Comme deux matrices transposées l'une de l'autre ont même rang (le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace engendré par les vecteurs-colonne ou bien par les vecteurs-ligne de cette matrice), les opérateurs T et T^* ont même rang.

I.4.c. On sait que $(T^*)^* = T$ (d'après la formule d'adjonction) ; en appliquant la conclusion de **I.4.a** à T^*, il vient

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Im}(T^*)^* \subset (\operatorname{Ker}(T^*))^{\perp}\,.$$

Le sous-espace $(\operatorname{Ker}(T^*))^{\perp}$ a pour dimension $n - \dim(\operatorname{Ker}(T^*)) = \operatorname{rang}(T^*)$; comme les deux sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} T$ et $(\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$ sont inclus l'un dans l'autre et ont même dimension, ils sont égaux. L'orthogonal du noyau F de T^* est donc $\operatorname{Im} T$ et l'on a, puisque $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ d'après le théorème de Pythagore, la décomposition orthogonale de l'espace E en

$$E = \operatorname{Im} T \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} T^*\,.$$

Partie II.

II.1. On a

$$\|Q(\vec{V})\| = \|P_N[(P_{N-1} \circ \cdots \circ P_2)(P_1(\vec{V})]\| \leq \|(P_{N-1} \circ \cdots \circ P_2)(P_1(\vec{V}))\|$$

d'après le **I.2.a**. En itérant (on travaille avec $P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1$ à la place de Q), on trouve bien

$$\|Q(\vec{V})\| \leq \|P_1(\vec{V})\| \leq \|\vec{V}\|\,.$$

II.2. Si $Q(\vec{V}) = \vec{V}$, on a $\|P_1(\vec{V})\| = \|\vec{V}\|$ d'après le **II.1**. Comme

$$\|\vec{V}\|^2 = \|P_1(\vec{V})\|^2 + \|\vec{V} - P_1(\vec{V})\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore, on a bien

$$Q(\vec{V}) = \vec{V} \Longrightarrow P_1(\vec{V}) = \vec{V}\,.$$

On a donc

$$Q(\vec{V}) = \vec{V} \Longrightarrow (P_N \circ \cdots \circ P_2)(\vec{V}) = \vec{V}\,.$$

En répétant le raisonnement ci-dessus mais cette fois avec $P_N \circ \cdots \circ P_2$ à la place de Q, on trouve $P_2(\vec{V}) = \vec{V}$. Ainsi de suite, on voit de proche en proche que

$$Q(\vec{V}) = \vec{V} \Longrightarrow P_1(\vec{V}) = \cdots = P_N(\vec{V}) = \vec{V}\,.$$

Si $\vec{V}$ est dans le noyau de $\mathrm{Id}_E - Q$, le vecteur $\vec{V}$ qui s'écrit $P_j(\vec{V})$ pour $j = 1, ..., N$ est dans tout sous-espace F_j, $j = 1, ..., N$, donc dans l'intersection $F_1 \cap \cdots \cap F_N$.
Si $\vec{V}$ est dans tous les F_j, $j = 1, ..., N$, on a $P_1(\vec{V}) = \vec{V}$, $P_2(P_1(\vec{V})) = P_2(\vec{V}) = \vec{V}$,..., et ainsi de suite, de proche en proche, $Q(\vec{V}) = \vec{V}$; on a donc bien

$$F_1 \cap \cdots \cap F_N \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q)\,.$$

Comme on établi aussi précédemment l'autre inclusion, on a bien de fait l'égalité

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q) = F_1 \cap \cdots \cap F_N\,.$$

II.3. L'adjoint de Q s'obtient (puisque $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$) comme

$$Q^* = P_1^* \circ \cdots \circ P_N^*\,;$$

comme toute projection orthogonale est un opérateur symétrique (voir le **I.2.b**), on a

$$Q^* = P_1 \circ \cdots \circ P_N\,.$$

Comme $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ d'après la formule d'adjonction et que l'adjoint d'une combinaison linéaire d'opérateurs est la combinaison linéaire correspondante des adjoints, on a

$$(\mathrm{Id}_E - Q)^* = \mathrm{Id}_E - (P_1 \circ \cdots \circ P_N)\,.$$

Le noyau de $(\mathrm{Id}_E - Q)^* = \mathrm{Id}_E - \widetilde{Q}$, où $\widetilde{Q} := P_1 \circ \cdots \circ P_N$ est donc, si l'on reprend avec $\widetilde{Q}$ à la place de Q le raisonnement décrit au **II.2**,

$$\mathrm{Ker}\,(I - \widetilde{Q}) = F_N \cap \cdots \cap F_1 = F_1 \cap \cdots \cap F_N = \mathrm{Ker}\,(I - Q)\,.$$

On a donc bien

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q)^* = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q) = F_1 \cap \cdots \cap F_N\,.$$

II.4. D'après le **II.1**, on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|Q^{k+1}(\vec{U})\| = \|Q(Q^k(\vec{U}))\| \leq \|Q^k(\vec{U})\|$$

(on prend $\vec{V} = Q^k(\vec{U})$ pour appliquer **II.1**). La suite $(\|Q^k(\vec{U})\|)_{k\geq 1}$ est donc une suite de nombres réels décroissante et minorée par 0, donc convergente vers une limite $a(\vec{U})$.

II.5.a. Comme la suite $(\|Q^k(\vec{U})\|)_{k\geq 1}$ est décroissante et est supposée ici converger vers $a(\vec{U}) > 0$, tous les nombres $\|Q^k(\vec{U})\|$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont non nuls. On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\vec{u}_k\| = \frac{\|Q^k(\vec{U})\|}{\|Q^k(\vec{U})\|} = 1\,.$$

On a aussi

$$Q(\vec{u}_k) = \frac{Q[Q^k(\vec{U})]}{\|Q^k(\vec{U})\|} = \frac{Q^{k+1}(\vec{U})}{\|Q^k(\vec{U})\|}\,;$$

en prenant les normes, on a donc

$$\|Q(\vec{u}_k)\| = \frac{\|Q^{k+1}(\vec{U})\|}{\|Q^k(\vec{U})\|}$$

et par conséquent

$$\lim_{k\to\infty} \|Q(\vec{u}_k)\| = \frac{a(\vec{U})}{a(\vec{U})} = 1\,.$$

II.5.b. On a, d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}\|P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1(\vec{u}_k)\|^2 &= \|Q(\vec{u}_k)\|^2 + \|(P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1)(\vec{u}_k) - Q(\vec{u}_k)\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}_k\|^2 = 1\,;\end{aligned}$$

Comme $\|Q(\vec{u}_k)\|$ tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \|(P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1)(\vec{u}_k) - Q(\vec{u}_k)\| = 0\,.$$

Si l'on raisonne avec $\widetilde{Q} := P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1$ à la place de Q, on a de même, toujours grâce à Pythagore,

$$\|P_{N-2} \circ \cdots \circ P_1(\vec{u}_k)\|^2 = \|\widetilde{Q}(\vec{u}_k)\|^2 + \|P_{N-2} \circ \cdots \circ P_1(\vec{u}_k) - \widetilde{Q}(\vec{u}_k)\|^2 \leq \|\vec{u}_k\|^2 = 1\,;$$

mais, comme ici encore $\|\widetilde{Q}(\vec{u}_k)\|$ tend vers 1 lorsque k tend vers l'infini car $\Big|\|Q(\vec{u}_k)\| - \|\widetilde{Q}(\vec{u}_k)\|\Big| \leq \|Q(\vec{u}_k) - \widetilde{Q}(\vec{u}_k)\|$ d'après l'inégalité triangulaire (volet de gauche) et le fait que la quantité majorante tende vers 0, on a encore

$$\lim_{k\to\infty} \|(P_{N-2} \circ \cdots \circ P_1)(\vec{u}_k) - \widetilde{Q}(\vec{u}_k)\| = 0\,.$$

On continue ainsi de suite et l'on trouve, en récapitulant :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|(P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1)(\vec{u}_k) - Q(\vec{u}_k)\| &= 0 \\
\lim_{k\to\infty} \|(P_{N-2} \circ \cdots \circ P_1)(\vec{u}_k) - (P_{N-1} \circ \cdots \circ P_1)(\vec{u}_k)\| &= 0 \\
&\vdots \\
\lim_{k\to\infty} \|(P_2 \circ P_1)(\vec{u}_k) - P_1(\vec{u}_k)\| &= 0 \\
\lim_{k\to\infty} \|P_1(\vec{u}_k) - \vec{u}_k\| &= 0\,.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\|\vec{V}_1 + \cdots + V_N\| \leq \|\vec{V}_1\| + \cdots + \|\vec{V}_N\|$$

si les $\vec{V}_j$, $j = 1, ..., N$, sont des vecteurs de E (d'après le résultat établi en question préliminaire, on a, en ajoutant les inégalités ci-dessus et en appliquant l'inégalité triangulaire que nous venons de mentionner,

$$\lim_{k\to\infty} \|\vec{u}_k - Q(\vec{u}_k)\| = 0\,,$$

ce qui est la conclusion voulue.

II.5.c. On a

$$Q^k(\vec{V}) = Q^k(\vec{U} - Q(\vec{U})) = (\mathrm{Id}_E - Q)(Q^k(\vec{U}))\,;$$

comme

$$Q^k(\vec{U}) = \|Q^k(\vec{U})\| \times \vec{u}_k\,,$$

on a, par linéarité de l'opérateur $\mathrm{Id}_E - Q$,

$$Q^k(\vec{V}) = \|Q^k(\vec{U})\| \times (\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{u}_k)\,.$$

On a donc

$$\|Q^k(\vec{V})\| = \|Q^k(\vec{U})\| \times \|(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{u}_k)\| \leq \|\vec{U}\| \times \|(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{u}_k)\|\,;$$

par conséquent, lorsque k tend vers $+\infty$, on a bien, en utilisant la conclusion de **II.5.b**, le fait que $\|Q^k(\vec{V})\|$ tende vers 0.

II.5.d. Les calculs précédents restent valables dans le cas où $a(\vec{U}) = 0$ et l'on a

$$\|Q^k(\vec{V})\| = \|Q^k(\vec{U})\| \times \|\vec{u}_k - Q(\vec{u}_k)\| \leq 2\|Q^k(\vec{U})\| \times \|\vec{u}_k\| = 2\|Q^k(\vec{U})\|$$

d'après le résultat de la question préliminaire et le fait que $\|Q^k(\vec{u}_k)\| \leq \|\vec{u}_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (ceci résultant de **II.1** par itération). Si

$$\lim_{k\to\infty} \|Q^k(\vec{U})\| = 0\,,$$

on a donc bien par majoration

$$\lim_{k\to\infty} \|Q^k(\vec{V})\| = 0\,.$$

II.6.a. Si $\vec{V} \in F_1 \cap \cdots \cap F_N = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q)$, on a

$$Q(\vec{V}) = \vec{V}$$

et, en itérant cette relation,

$$Q^k(\vec{V}) = \vec{V}\,.$$

D'autre part, on a $P(\vec{V}) = \vec{V}$ puisque P est l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F_1 \cap \cdots \cap F_N$ et que $\vec{V}$ appartient précisément à ce sous-espace.

II.6.b. Si $\vec{V}$ est orthogonal à $F_1 \cap \cdots \cap F_N$ et si P est l'opérateur de projection orthogonale sur ce sous-espace vectoriel, on a, par définition même de la projection orthogonale, $P(\vec{V}) = 0$.

II.6.c. On écrit le vecteur $\vec{V}$ sous la forme $\vec{V} = (\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U}) + \vec{W}$, où $\vec{U}$ est un vecteur de E et $\vec{W}$ un élément de $F_1 \cap \cdots \cap F_N$: une telle écriture existe en effet à cause de **I.4.c** appliqué avec $T = \mathrm{Id}_E - Q$ et du fait que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - Q)^* = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - Q) = F_1 \cap \cdots \cap F_N$ d'après les résultats établis en **II.2** et **II.3**. On a donc, d'après la linéarité de $Q^k - P$ et l'inégalité établie en question préliminaire,

$$\begin{aligned}
\|Q^k(\vec{V}) - P(\vec{V})\| &\leq \left\|Q^k[(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U})] - P[(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U})]\right\| \\
&\qquad + \|Q^k(\vec{W}) - P(\vec{W})\| \\
&\leq \left\|Q^k[(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U})]\right\|
\end{aligned}$$

puisque $(Q^k - P)(\vec{W}) = 0$ (d'après le résultat établi en **II.6.a**) et le fait que $P[(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U})] = 0$ d'après le résultat établi au **II.6.b**. En utilisant le résultat établi au **II.5**, on sait que

$$\lim_{k\to\infty} \left\|Q^k[(\mathrm{Id}_E - Q)(\vec{U})]\right\| = 0\,.$$

On a donc bien (par majoration)

$$\lim_{k\to\infty} \|Q^k(\vec{V}) - P(\vec{V})\| = 0\,,$$

ce qui est la conclusion voulue.