**MHT512: Intégration** **2008**

## Devoir maison N 3

**1.** *Soient* $I = [0,1]$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$, $f(u,v) = \frac{1}{1+u^2v^2}$ *et* $g(x,y,t) = f(x,t)f(y,t)$ *où* $(x,y,t) \in J =: I \times I \times \mathbb{R}_+$.

**(a)** *Montrer que* $g$ *est intégrable sur* $J$ *(muni de mesure de Lebesgue) et, en appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli à* $J = \mathbb{R}_+ \times I^2$, *que* $A =: \int_J g dt dx dy = \int_{\mathbb{R}_+} (\frac{arctan(t)}{t})^2 dt$.
**(b)** *En décomposant* $\frac{1}{1+as} \cdot \frac{1}{1+bs}$ *en éléments simples et en appliquant Fubini-Tonnelli à* $J = I^2 \times \mathbb{R}_+$ *montrer que* $A = \frac{\pi}{2} \int_{I\times I} \frac{dxdy}{x+y}$.
**(c)** *En appliquant à nouveau le théorème de Fubini-Tonnelli à cette dernière intégrale, montrer que* $A = \pi ln 2$.

**2.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ = [0,\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction mesurable et* $g_{a,b}(x,y) = f(x+y)x^a y^b$ *où* $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ *et* $a > -1,\ b > -1$.

**(a)** *En supposant que* $f$ *est continue, montrer que* $g_{a,b}$ *est intégrable sur tout carré* $]0,c[\times]0,c[$, $c > 0$.
**(b)** *Montrer que l'application* $\varphi : (u,t) \longmapsto (tu, (1-t)u)$ *est une bijection de* $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ *sur* $\mathbb{R}_+^2$ *et calculer son Jacobien.*
**(c)** *En effectuant un changement de variables indiqué en (b) et en appliquant Fubini-Tonnelli, montrer que* $\int_{\mathbb{R}_+^2} g_{a,b} dxdy = I(a,b)F(a+b+2)$ *où* $I(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b dt$, $F(c) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)u^{c-1}du$, $c > 0$.

**3.** *Soit* $1 < p < \infty$ *et* $L^p = L^p(\mathbb{R}_+) = \{f : \int_0^\infty |f(t)|^p dt < \infty\}$ *l'espace de Lebesgue sur* $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ *muni de la norme* $\|f\|_p = (\int_0^\infty |f(t)|^p dt)^{1/p}$. *Pour* $f \in L^p$ *et* $x > 0$ *on pose*

**(a)** *Soit* $0 < \alpha < \frac{1}{p'}$ *où* $p'$ *est l'exposant conjugué,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *En écrivant* $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)t^\alpha t^{-\alpha}dt$ *montrer que*

$$\Big|F(x)\Big|^p \leq \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} dt.$$

**(b)** *En déduire que* $\displaystyle\int_0^\infty \Big|F(x)\Big|^p dx \leq \frac{1}{\alpha p'(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^\infty |f(t)|^p dt.$
**(c)** *Montrer que* $T$ *est un opérateur linéaire continu de* $L^p(\mathbb{R}_+)$ *dans lui même. En étudiant la fonction* $\alpha \longmapsto \alpha p(1-\alpha p')^{p/p'}$ *montrer que* $\|T\| \leq p'$ *où* $T\| = sup\{\|Tf\|_p : \|f\|_p \leq 1\}$, *la norme de* $T$.

*- FIN -*