

Equations différentielles.

EXERCICE 1.

1. Résoudre les équations différentielles par la méthode de séparation de variables :

$$\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0, \quad xy' - y = y^3, \quad xyy' = 1 - x^2, \quad y' \tan x = y.$$

2. Trouver les solutions satisfaisant les conditions initiales :

$$(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1; \quad (xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, \quad y(0) = 1; \quad y' \sin x = \cos y, \quad y(\pi/4) = 1.$$

EXERCICE 2. Ramener les équ. diff. données à celles du type d'exercice précédent par un changement de variable, et ensuite les résoudre :

$$y' = (x + y)^2, \quad y' = (8x + 2y + 1)^2, \quad (2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$$

EXERCICE 3.

1. Résoudre les équ. diff. homogènes (d'ordre un) par le changement de variable $y = xu$ (ou bien $x = yu$) :

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} - 1, \quad (x - y)y dx - x^2 dy = 0, \quad y' = -\frac{x + y}{x}.$$

2. Paramétriser les courbes intégrales de l'équa. diff.

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

Expliciter les courbes passant par (4,0) et (1,1).

EXERCICE 4.

1. Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

$$y' - y = e^x, \quad y' = y \tan x + \cos x, \quad y' + 2xy = x, \quad y' - y/x = x, \quad xy' - 2y = 3x^4, \\ y' + 2y/x = x^3, \quad y' - y \cot x = \sin x, \quad (2x + 1)y' = 4x + 2y, \quad y' - yx/(x^2 + 1) = x.$$

2. Trouver les solutions satisfaisant les conditions initiales :

$$xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b; \quad y' - y(1 - x^2) - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0; \quad y' - y \tan x = 1/\cos x, \quad y(0) = 1, \\ x^2y' - 2xy = -3, \quad y(-1) = 1; \quad (1 + x^2)y' - 2xy = 4x, \quad y(1) = 0; \quad y' - y \tan x = \cos x, \quad y(1) = 2.$$

3. Résoudre les équations de Bernoulli :

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}, \quad y' + y/x = -xy^2, \quad 2xyy' - y^2 + x = 0.$$

EXERCICE 5. Trouver les relations intégrales pour les équ. diff. suivantes :

$$(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0, \quad (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0, \quad (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0.$$