Semestre 5, Année 2008-2009 SESSION 2

UE : MHT512

Date : 9 Juin 2009, 14h-17h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1.

1.1. *Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.*

On cite ici le résultat du cours.

Théorème 1 (théorème de convergence dominée) *Soit Ω un ensemble équipé d'une tribu $\mathcal{T}$, $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow [0,\infty]$ une mesure positive. Soit $(f_k)_{k\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^m$ (relativement à la tribu $\mathcal{T}$ à la source et à la tribu borélienne $\mathcal{B}$ au but), toutes intégrables relativement à la mesure μ, telle que :*

- *d'une part, la suite $(f_k)_k$ converge simplement pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$;*
- *d'autre part, il existe une fonction $g : (\Omega, \mathcal{T})$-$([0,\infty], \mathcal{B})$, intégrable relativement à la mesure μ, dominant uniformément les f_k, $k \in \mathbb{N}$, au sens suivant :*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, \omega \in \Omega\,,\ |f_k(\omega)| \leq g(\omega)\,.$$

Il existe alors au moins une fonction $(\Omega, \mathcal{T})$-$(\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^m, \mathcal{B})$ mesurable f telle

$$f(\omega) = \lim_{k\to+\infty} f_k(\omega)$$

pour μ-presque tout ω. De plus, étant donnée une telle fonction f, f est aussi intégrable relativement à la mesure μ et l'on dispose de la possibilité d'intervertir limite lorsque k tend vers $+\infty$ et prise d'intégrale relativement à la mesure μ :

$$\lim_{k\to+\infty} \Big(\int_\Omega f_k \, d\mu \Big) = \int_\Omega f \, d\mu\,.$$

1.2 *Soit $\alpha \in]0,1[$. On introduit la suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ définies sur $[0,1]$ par*

$$f_k(t) = \frac{t^\alpha \cos(t/k) \log(1+t/k)}{t^2 + \frac{1}{k}}.$$

Calculer

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{[0,1]} f_k(t)\, dt.$$

On a, pour tout $t \in]0,1]$, lorsque k tend vers $+\infty$,

$$f_k(t) \sim t^\alpha \times \frac{t}{k} \times \frac{1}{t^2} = \frac{t^{\alpha-1}}{k},$$

donc $\lim_{k\to+\infty} f_k(t) = 0$. On sait que, pour tout $u \in [0,+\infty[$, $\log(1+u) \leq u$, puisque le graphe de la fonction concave $u \mapsto v = \log(1+u)$ reste sous sa tangente à l'origine, en l'occurrence la droite d'équation cartésienne $v = u$. Toutes les fonctions f_k, $k \geq 1$ sont donc « dominées » sur $]0,1]$ en module ainsi :

$$|f_k(t)| \leq t^\alpha \times \frac{t}{k} \times \frac{1}{t^2} \leq t^{\alpha-1}$$

(on majore ici $|\cos(t/k)|$ par 1). Comme $\alpha \in]0,1]$, la fonction $t \in]0,1] \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,1]$ d'après le critère de Riemann. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue rappelé ci-dessus s'applique donc et l'on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[0,1]} f_k(t)\,dt = \int_{]0,1]} (\lim_{k\to+\infty} f_k(t))\,dt = 0.$$

Exercice 2.

2.1. *Montrer aue l'on définit une fonction de classe C^∞ dans $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ en posant*

$$F(x,y) = \int_{]0,\infty[} t^{x+iy-1} e^{-t}\,dt.$$

Exprimer les dérivées partielles de F par rapport à x et y sous forme d'intégrales dépendant des paramètres x et y.

Pour tout $t > 0$, la fonction

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto t^{x+iy} = \exp((x+iy)\log t)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car ses dérivées partielles à tout ordre existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$; on a en effet, pour tout $k,l \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}[t^{x+iy}] = (\log t)^k (i \log t)^l = i^l (\log t)^{k+l}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $A > 0$, pour tout $k,l \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $C_{\epsilon,k,l} > 0$, $K_{A,k,l} > 0$ telles que

$$\forall\, t \in]0,1], \quad |\log t|^{k+l} \leq C_{\epsilon,k,l}\, t^{-\epsilon}$$
$$\forall\, t \in [1,+\infty[, \quad |\log t|^{k+l} \leq K_{A,k,l}\, t^{-A}\, e^{t/2}$$

En effet, on a

$$\lim_{t\to 0^+}((\log t)^{k+l}\, t^{\epsilon}) = \lim_{t\to +\infty}(t^A(\log t)^{k+l}e^{-t/2}) = 0.$$

Pour tout (x,y) tel que $\epsilon \leq x \leq A$, on a donc

$$\begin{aligned}
&\forall\, t \in]0,1],\ |\log t|^{k+l}|t^{x+iy-1}|e^{-t} = |\log t|^{k+l}t^{x-1}e^{-t} \leq C_{\epsilon,k,l}t^{x-1-\epsilon}e^{-t}\\
&\forall\, t \in [1,+\infty[,\ |\log t|^{k+l}|t^{x+y-1}|e^{-t} \leq |\log t|^{k+l}t^{A}e^{-t} \leq K_{A,k,l}e^{-t/2}\,.
\end{aligned}$$

On a donc ainsi, pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in]\epsilon, A[,\ \forall\, t \in]0,\infty[,\ \Big|\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}[t^{x+iy-1}e^{-t}]\Big| \leq g_{\epsilon,A,k,l}(t)\,,$$

où $g_{\epsilon,A,k,l}$ est la fonction intégrable sur $]0,\infty[$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) définie par

$$\forall\, t>0,\ g_{\epsilon,A,k,l}(t) = C_{\epsilon,k,l}\, t^{x-1-\epsilon}e^{-t}\chi_{]0,1]}(t) + K_{A,k,l}\, e^{-t/2}\chi_{[1,+\infty[}(t).$$

Il résulte alors du théorème de différentiabilité des intégrales fonction de plusieurs paramètres (ici deux paramètres x et y) que la fonction F est de classe C^∞ sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, \epsilon < x < A\}$ et que ses dérivées partielles valent

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}[F] = \int_{]0,\infty[} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}[t^{x+iy-1}e^{-t}]\, dt = i^l \int_{]0,+\infty[} (\log t)^{k+l} t^{x+iy-1}\, e^{-t}\, dt \tag{$\dagger$}$$

pour tout $(k,l)\in\mathbb{N}^2$. Comme $\epsilon>0$ et $A>0$ sont ici arbitraires, la fonction F est bien C^∞ dans $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et ses dérivées partielles sont données par les formules ($\dagger$).

2.2. *Pour $x>0$, on note $\Gamma(x) = F(x,0)$. Montrer que*

$$x \mapsto \log\Gamma(x)$$

est une fonction convexe sur $]0,\infty[$, i.e. que si x_1 et x_2 sont deux nombres réels positifs avec $x_1 < x_2$ et si $\lambda \in]0,1[$,

$$\log\Gamma(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \log\Gamma(x_1) + (1-\lambda)\log\Gamma(x_2).$$

On utilise l'inégalité de Hölder avec $p = 1/\lambda$, $p' = 1/(1-\lambda)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{]0,+\infty[} t^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - 1}\, e^{-t}\, dt = \int_{]0,+\infty[} (t^{x_1-1}e^{-t})^{\lambda} \times (t^{x_2-1}e^{-t})^{1-\lambda}\, dt\\
\leq\ & \Big(\int_{]0,+\infty[} [(t^{x_1-1}e^{-t})^{\lambda}]^{\frac{1}{\lambda}}\, dt\Big)^{\lambda} \times \Big(\int_{]0,+\infty[} [(t^{x_2-1}e^{-t})^{1-\lambda}]^{\frac{1}{1-\lambda}}\, dt\Big)^{\lambda}\\
\leq\ & (\Gamma(x_1))^{\lambda} \times (\Gamma(x_2))^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

En prenant les logarithmes des deux membres de cette inégalité, on trouve l'inégalité de convexité voulue.

2.3. *Vérifier, pour tout $x > 0$ la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Il s'agit juste ici d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^A t^x e^{-t}\,dt &= \Big[t^x \times (-e^{-t})\Big]_\epsilon^A - \int_\epsilon^A (xt^{x-1}) \times e^{-t}\,dt \\ &= -e^{-\epsilon}\epsilon^x + A^x e^{-A} + x\int_\epsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,dt.\end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, A vers $+\infty$, et en appliquant le théorème de convergence monotone de Beppo-Lévi, on obtient la formule voulue.

2.4. *On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le volume de la boule unité euclidienne*

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

de l'espace $\mathbb{R}^n$. En utilisant judicieusement le théorème de Fubini-Tonnelli (exhiber une relation de récurrence simple liant V_n et V_{n-2} si $n \geq 3$), montrer, en distinguant les cas où n est pair ou impair, que

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Si l'on utilise le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 3.7 du cours), on constate que l'on a la relation inductive :

$$\begin{aligned}V_n = \int_{\mathbb{B}^n} dx_1\cdots dx_n &= \int_{x_1^2+x_2^2\leq 1}\Big(\int_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\,B_{n-2}} dx_3\cdots dx_n\Big)\,dx_1dx_2 \\ &= V_{n-2} \times \int_{x_1^2+x_2^2\leq 1}\Big(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\Big)^{n-2}\,dx_1dx_2 \\ &= 2\pi V_{n-2} \times \int_{[0,1]} (1-r^2)^{(n-2)/2}\,rdr \\ &= \pi V_{n-2} \times \int_0^1 (1-u)^{(n-2)/2}\,du = \frac{2\pi}{n}\,V_{n-2}\,.\end{aligned}$$

(en utilisant pour l'avant dernière ligne la formule de changement de variables en coordonnées polaires dans les intégrales doubles). On en déduit donc, puisque $V_1 = 2$ et $V_2 = \pi$, les formules

$$V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \qquad \begin{aligned}V_{2n+1} &= \frac{2^{n+1}\pi^n}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \\ &= \frac{\pi^n}{1/2\times 3/2\times\cdots\times(n+1/2)}\end{aligned}$$

Comme

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

pour $x > 0$, on remarque que ces deux expressions peuvent être fondues en une seule :

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\,, \ \forall\, n \geq 1\,.$$

Exercice 3. *On rappelle ici une propriété essentielle des espaces $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$, $p \in]1, \infty[$: si $\dot{f}$ est un élément de $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$, l'application*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|^p\, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$. On admettra ce résultat dans cet exercice.

3.1. *Soit $p \in]1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p, définie par $1/q = 1 - 1/p$. Rappeler comment est définie la convolution d'un élément $\dot{f} \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ et d'un élément $\dot{g} \in L^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$.*

Il s'agit de l'élément de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ dont un représentant est la fonction définie dx-presque partout (en fait, dans ce cas particulier partout grâce à l'inégalité de Hölder) par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\, dt.$$

3.2. *Montrer que la convolée d'un élément $\dot{f} \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ et d'un élément $\dot{g} \in L^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ admet un représentant borné et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Si l'on utilise le représentant exhibé à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt\Big| \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} \times \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^q\, dt\Big)^{1/q} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} \times \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(x+u)|^q\, dt\Big)^{1/q} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} \times \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(u)|^q\, du\Big)^{1/q}
\end{aligned}$$

grâce à la formule de changement de variable ($t \leftrightarrow u = -t$) et à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation. D'autre part, pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, et toujours en utilisant ce même représentant,

$$\begin{aligned} |(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}}(f(x_1-t)-f(x_2-t))g(t)\,dt\Big| \\ \leq\ & \Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x_1-t)-f(x_2-t)|^p\,dt\Big)^{1/p}\times\Big(\int_{\mathbb{R}}|g(t)|^q\,dt\Big)^{1/q} \\ \leq\ & \Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x_1-x_2+u)-f(u)|^p\,du\Big)^{1/p}\times\Big(\int_{\mathbb{R}}|g(t)|^q\,dt\Big)^{1/q} \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons que précdemment. En utilisant la continuité en $x=0$ de

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}}|f(x+u)-f(u)|^p\,du$$

(rappelée en tête de cet exercice), on voit que pour tout $\eta>0$, il existe $\epsilon(\eta)>0$ tel que

$$\begin{aligned} |x_1-x_2|\leq\eta\ &\Longrightarrow\ \Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x_1-x_2-u)-f(u)|^p\,du\Big)^{1/p}\leq\epsilon \\ &\Longrightarrow\ |(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)|\leq\epsilon\Big(\int_{\mathbb{R}}|g(t)|^q\,dt\Big)^{1/q}, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien l'uniforme continuité de ce représentant borné ainsi choisi.

3.3. *Soit A un sous-ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue strictement positive. Montrer que $\dot{\chi}_A*\dot{\chi}_A(-\cdot)$ admet un représentant continu sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur en 0 de ce représentant.*

Si A est mesurable borné, A est intégrable, la fonction χ_A est dans tous les $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},dt)$ pour tout $p\in[1,+\infty[$. Il en est de même pour la fonction caractéristique du symétrique $-A$ de A par rapport à l'origine (cette seconde fonction est en particulier dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R},dt)$, où $1/q=1-1/p$ si $p>1$). On peut donc choisir p arbitrairement dans $]1,+\infty[$ et appliquer le résultat établi à la question **3.2**. Le représentant continu (en fait uniformément continu) à choisir est

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}}\chi_A(x-t)\chi_A(-t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}\chi_A(x+u)\,\chi_A(u)\,du=\int_A\chi_A(x+u)\,du.$$

Sa valeur en $x=0$ est $\mu(A)$ car $\chi_A^2\equiv\chi_A$.

3.4. *Déduire de la question précédente que l'ensemble $\{x-y\,;\,x\in A,y\in A\}$ contient un intervalle $]-\eta,\eta[$ avec $\eta>0$.*

Comme la fonction $\chi_A*\chi_A(-\cdot)$ est continue en $x=0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$|z|<\eta\Longrightarrow(\chi_A*\chi_A(-\cdot))(z)\geq\mu(A)/2>0.$$

Mais, comme

$$(\chi_A * \chi_A(-\cdot))(z) = \mu(A \cap \{t\,;\, z+u \in A\})\,,$$

dire que $(\chi_A * \chi_A(-\cdot))(z) > 0$ implique que z s'écrive nécessairement sous la forme $z = (z+u) - u$, où $z+u$ et u sont tous deux dans A. On voit donc que $\{x - y\,;\, x \in A, y \in A\}$ contient l'intervalle $]-\eta, \eta[$.

Exercice 4. *Vérifiez que les intégrales fonction d'un paramètre*

$$\begin{aligned} \Phi\ &: x \in \mathbb{R} &\longmapsto& \int_{]0,\infty[} \cos(xt) e^{-t^2}\, dt \\ \Psi\ &: x \in \mathbb{R} &\longmapsto& \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t^2}\, dt \end{aligned}$$

sont bien définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et sont des fonctions dérivables du paramètre x. Vérifiez que Φ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on intégrera. Montrez que

$$\lim_{x \to +\infty} \Psi(x)$$

existe et calculez cette limite.

Comme

$$\forall\, t \in [0, \infty[\,,\ |\cos(xt)| e^{-t^2} \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad \Big|\frac{\sin(xt)}{t}\Big| e^{-t^2} \leq |x| e^{-t^2}$$

puisque $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et que la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, \infty[$, Φ et Ψ sont bien définies pour tout x à cause du critère de domination (aucun problème de mesurabilité puisque les fonctions à intégrer sont toutes continues) car les intégrales en jeu sont convergentes au sens de Lebesgue. Pour chaque $t \in]0, \infty[$, les fonctions

$$x \mapsto \cos(xt) e^{-t^2}\,,\ x \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}\, e^{-t^2}$$

sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées respectives les fonctions

$$x \longmapsto -t \sin(xt) e^{-t^2} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \cos(xt) e^{-t^2}.$$

Comme

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, t \in]0, \infty[\,, \quad |\cos(xt)| e^{-t^2} + t |\sin(xt)| e^{-t^2} \leq (1+t) e^{-t^2},$$

et que la fonction $t \mapsto (1+t) e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, \infty[$, la clause de domination du théorème de dérivation des intégrales à paramètre est bien remplie pour les intégrales à paramètres Φ et Ψ et ces deux fonctions sont donc bien dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées

$$\begin{aligned} \Phi'(x) \ &:= \ -\int_{[0,\infty[} t\sin(xt)\, e^{-t^2}\, dt \\ \Psi'(x) \ &:= \ \int_{[0,\infty[} \cos(xt)\, e^{-t^2}\, dt = \Phi(x)\,. \end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne

$$\Phi'(x) = \Big[-\sin(xt)\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^\infty x\cos(xt)e^{-t^2}\, dt = -\frac{x}{2}\Phi(x)\,.$$

Une intégration immédiate de cette équation différentielle du premier ordre nous donne

$$\Phi(x) = \Phi(0)e^{-x^2/4} = e^{-x^2/4} \times \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x^2/4}\,.$$

Puisque $\Psi' = \Phi$, on a

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^x e^{-t^2/4}\, dt\,.$$

Or $\Psi(0) = \lim\limits_{x\to 0}\Psi(x) = 0$ grâce au théorème de convergence dominée puisque

$$\Big|\frac{\sin(xt)}{t}\Big|\, e^{-t^2} \leq |x|\, e^{-t^2} \leq e^{-t^2}$$

si $|x| \leq 1$; donc

$$\lim_{x\to+\infty}\Psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty e^{-t^2/4}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 5. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Montrer qu'il existe un élément f de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |f_n(\omega) - f(\omega)|^p\, d\mu(\omega) = 0.$$

Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

On suppose de plus que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$. Montrer que $f(t) = 0$ pour presque tout t.

La première assertion résulte du théorème de Riesz-Fischer qui assure que $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, équipé de la norme de Minkowski $\| \, \|_p$, est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet. La suite $(\dot{f}_n)_{n \geq 0}$ converge donc vers un élément $\dot{f}$ dans ce espace. Il suffit de prendre ensuite pour f un représentant de $\dot{f}$, de manière à avoir

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)|^p \, d\mu(\omega) = \lim_{n \to +\infty} \|\dot{f}_n - \dot{f}\|_p^p = 0. \qquad (\dagger\dagger)$$

D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\epsilon^p \mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) \leq \int_{\{|f_n - f| \geq \epsilon\}} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \|\dot{f}_n - \dot{f}\|_p^p.$$

On en déduit

$$\mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) \leq \frac{\|\dot{f}_n - \dot{f}\|_p^p}{\epsilon^p},$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} \mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0$ car $\|f_n - f\|_p^p$ tend vers 0 d'après ($\dagger\dagger$). On sait d'autre part (c'est un avatar de la preuve du théorème de Riesz-Fischer) que si $\|\dot{f}_n - \dot{f}\|_p$ tend vers 0, on peut extraire de la suite de représentants $(f_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite convergent presque partout vers le représentant choisi f de $\dot{f}$. Comme on fait ici l'hypothèse que $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$ pour μ-presque tout t, on a bien $\dot{f} = 0$ (ou encore $f(t) = 0$ pour μ-presque tout t).