Semestre 5, Année 2009-2010 SESSION 2

UE : MHT512

Date : 08 Juin 2010, 14h-17h Durée : 3h

Texte et corrigé.

Exercice I

Thème : *Intégration « pratique ». Soient α et β deux nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à -1.*

I.1. *En exploitant l'identité*

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k \quad \forall\, x, y \in [0,1[\,,$$

montrer que la fonction

$$(x,y) \in]0,1[^2 \mapsto \frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}$$

est intégrable relativement à la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^2$ et établir la formule

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\, dxdy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)(k+\beta)} \tag{1}$$

(on citera précisément les théorèmes du cours sur lesquels repose la justification de ces résultats).

On pose $a = \mathrm{Re}\,\alpha$ et $b = \mathrm{Re}\,\beta$. Pour tout $x, y \in]0,1[$, on a donc $|x^\alpha y^\beta| = |x^\alpha|\,|y^\beta| = x^a y^b$. D'après le théorème de convergence monotone (ou, si l'on veut, le théorème de Fubini-Tonelli, les deux résultats étant applicables ici), on a

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{|x^\alpha|\,|y^\beta|}{1-xy}\, dx\, dy = \iint_{]0,1[^2} x^a y^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k\Big)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{]0,1[^2} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^{a+k} y^{b+k}\Big)\, dxdy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{]0,1[^2} x^{a+k} y^{b+k}\, dx\, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_{]0,1[} x^{a+k}\, dx\Big)\Big(\int_{]0,1[} y^{b+k}\, dy\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\Big[\frac{x^{a+k+1}}{a+k+1}\Big]_0^1\Big)\Big(\Big[\frac{y^{b+k+1}}{b+k+1}\Big]_0^1\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k+1)(b+k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)} < +\infty$$

(notons que l'on a utilisé de toutes façons le théorème de Fubini-Tonelli pour scinder les intégrales figurant dans la somme à la ligne 3).
La fonction (dont on vient de prouver qu'elle était intégrable)

$$(x,y) \mapsto \Big|\frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\Big| = \frac{|x^\alpha|\,|y^\beta|}{1-xy}$$

joue le rôle de chapeau dominant pour la suite de fonctions (en module)

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\Big)_{n\geq 0}$$

sur $]0,1[^2$. Or cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction

$$(x,y) \in]0,1[^2 \mapsto \frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue (on aurait pu aussi utiliser, ce qui revenait ici au même, le théorème de Fubini). Cela permet de conclure à la formule (1) car (en vertu du théorème de Fubini utilisé à la première ligne)

$$\begin{aligned}
\iint_{]0,1[^2} \Big(\sum_{k=0}^{n} x^{\alpha+k} y^{\beta+k}\Big)\,dxdy &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\int_{]0,1[} x^{\alpha+k}\,dx\Big)\Big(\int_{]0,1[} y^{\beta+k}\,dy\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(\Big[\frac{x^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1}\Big]_0^1\Big)\Big(\Big[\frac{y^{\beta+k+1}}{\beta+k+1}\Big]_0^1\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\alpha+k+1)(\beta+k+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(\alpha+k)(\beta+k)}.
\end{aligned}$$

I.2. *Montrer (toujours si* $\operatorname{Re}\alpha > -1, \operatorname{Re}\beta > -1$*) que les fonctions*

$$(x,y) \in]0,1[^2 \longmapsto \frac{x^\alpha y^\beta \log x}{1-xy}\,,\ \ (x,y) \in]0,1[^2 \longmapsto \frac{x^\alpha y^\beta \log y}{1-xy}$$

sont intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^2$ *et déduire de la formule* (1) *(en énoncant précisément le théorème du cours requis) la formule suivante :*

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{x^\alpha y^\beta \log(xy)}{1-xy}\,dxdy = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)(k+\beta)}\Big(\frac{1}{k+\alpha} + \frac{1}{k+\beta}\Big) \qquad (2)$$

(on se limitera à établir la formule (2) *uniquement dans le cas où α et β sont tous deux réels et dans* $]-1,+\infty[$*).*

Prouvons tout d'abord le premier point, c'est-à-dire l'intégrabilité demandée. On se contente de raisonner avec la première fonction (le résultat pour l'autre s'en déduit en échangeant les rôles de x et y). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que

$$\forall X \in]0,1[\,, |\log X| \leq \frac{C_\epsilon}{X^\epsilon}$$

(en effet $\lim_{X\to 0^+} X^\epsilon \log X = 0$). Pour $x, y \in]0,1[$ et $a = \mathrm{Re}\,\alpha > -1+\epsilon$, $b = \mathrm{Re}\,\beta > -1$, on a donc

$$\frac{x^a y^b \log(xy)}{1-xy} = \frac{x^{a-\epsilon} y^b x^\epsilon |\log x|}{1-xy} \leq C_\epsilon \frac{x^{a-\epsilon} y^b}{1-xy}$$

et la clause de domination assure l'intégrabilité de la fonction au membre de gauche (la fonction majorante $(x,y) \mapsto C_\epsilon (x^{a-\epsilon} y^b)/(1-xy)$ est intégrable sur $]0,1[^2$ du fait que $a-\epsilon > -1$ et $b > -1$, comme cela a été vu à la question **I.1**). Comme ϵ peut dans ce qui précède être choisi arbitrairement petit, la convergence de l'intégrale proposée dans cette question est assurée pour tout α, β de parties réelles a et b strictement supérieures à -1 (il y a toujours dans pareil cas un $\epsilon > 0$ tel que $a > -1+\epsilon$).

Pour prouver le second point, on utilise le théorème de dérivation des intégrales (au sens de Lebesgue) par rapport à un paramètre. Si $x, y \in]0,1[$, la fonction

$$(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy} = \frac{e^{\alpha \log x + \beta \log y}}{1-xy}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et de dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big[\frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\Big] &= \frac{x^\alpha y^\beta \log x}{1-xy} \\ \frac{\partial}{\partial \beta}\Big[\frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\Big] &= \frac{x^\alpha y^\beta \log y}{1-xy}. \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > -1+\epsilon$, $\beta > -1+\epsilon$, on a donc

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big[\frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\Big]\Big| &\leq \frac{x^{-1+\epsilon} y^{-1+\epsilon} |\log x|}{1-xy} \\ \Big|\frac{\partial}{\partial \beta}\Big[\frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\Big]\Big| &\leq \frac{x^{-1+\epsilon} y^{-1+\epsilon} |\log y|}{1-xy}, \end{aligned}$$

les fonctions dominantes étant ici des fonctions intégrables sur $]0,1[^2$ (c.f. question **I.2**) indépendantes de (α,β). Les conditions d'application du théorème (de Lebesgue) de dérivabilité des intégrales dépendant de deux paramètres (ici α,β) sont remplies et l'on peut affirmer que la fonction

$$(\alpha,\beta)\mapsto \iint_{]0,1]^2}\frac{x^\alpha y^\beta}{1-xy}\,dxdy$$

est de classe C^1 sur $]-1+\epsilon,+\infty[^2$, de dérivées partielles respectivement par rapport à α et β les fonctions

$$(\alpha,\beta)\mapsto \iint_{]0,1[^2}\frac{x^\alpha y^\beta\log x}{1-xy}\,dxdy$$
$$(\alpha,\beta)\mapsto \iint_{]0,1[^2}\frac{x^\alpha y^\beta\log y}{1-xy}\,dxdy$$

D'autre part, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction

$$(\alpha,\beta)\mapsto \frac{1}{(k+\alpha)(k+\beta)}$$

est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[\times]-1,+\infty[$, de dérivées partielles par rapport à α et β

$$(\alpha,\beta)\mapsto -\frac{1}{(k+\alpha)^2(k+\beta)}$$
$$(\alpha,\beta)\mapsto -\frac{1}{(k+\beta)^2(k+\alpha)}$$

Pour tout $\alpha>-1+\epsilon$, pour tout $\beta>-1+\epsilon$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\Big|\frac{1}{(k+\alpha)^2(k+\beta)}\Big|+\Big|\frac{1}{(k+\beta)^2(k+\alpha)}\Big|\le\frac{2}{(k-1+\epsilon)^3}\,.$$

Comme la série $\sum_1^\infty(k-1+\epsilon)^{-3}$ est convergente, le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions dépendant d'un paramètre (cas particulier du théorème de Lebesgue des intégrales fonction d'un paramètre, appliqué ici séparément pour α, puis pour β) s'applique et l'on peut affirmer que la fonction

$$(\alpha,\beta)\in]-1+\epsilon,+\infty[^2\mapsto\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(k+\alpha)(k+\beta)}$$

est de classe C^1 sur $]-1+\epsilon,+\infty[^2$. La somme de ses dérivées partielles est la fonction

$$(\alpha,\beta)\in]-1+\epsilon,+\infty[^2\mapsto -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+\alpha)(k+\beta)}\Big(\frac{1}{k+\alpha}+\frac{1}{k+\beta}\Big).$$

Du fait de la formule (1) établie à la question **I.1**, on a donc, en ajoutant les deux dérivées partielles de chacun des membres, puis en égalant les deux sommes obtenues, l'identité voulue pour tout $\alpha>-1+\epsilon,\beta>-1+\epsilon$. Mais ϵ étant ici arbitraire, l'identité est bien valable pour tout $\alpha>-1,\beta>-1$.

I.3. *Énoncer les théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini et expliquer pourquoi l'utilisation de ces deux théorèmes se trouve dans la pratique couplée. Montrer que la fonction*

$$(x,y,z)\in]0,1[^3\longmapsto \frac{x^\alpha y^\beta}{1-(1-xy)z}$$

est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^3$ *et que l'on a la formule suivante :*

$$\iiint_{]0,1[^3}\frac{x^\alpha y^\beta}{1-(1-xy)z}\,dxdydz=-\iint_{]0,1[^2}\frac{x^\alpha y^\beta\log(xy)}{1-xy}\,dxdy. \qquad (3)$$

Se reporter au polycopié de cours pour plus de détails sur les énoncés rappelés ici. On reproduit ici ces énoncés extraits du cours.

Théorème 1 (Fubini-Tonelli) *Soient* $(\Omega_j,\mathcal{T}_j,\mu_j)$, $j=1,2$, *deux espaces mesurés, les deux mesures* μ_1 *et* μ_2 *étant* σ*-finies,* $\mathcal{T}_1\otimes\mathcal{T}_2$ *la tribu produit et* $\mu_1\otimes\mu_2\ :\ \mathcal{T}_1\otimes\mathcal{T}_2\longrightarrow[0,\infty]$ *la mesure produit. Pour toute fonction* f $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{T}_1\otimes\mathcal{T}_2)$-$([0,\infty],\mathcal{B})$ *mesurable, les fonctions*

$$\begin{aligned} x\in\Omega_1 &\longmapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\,d\mu_2(y)\\ y\in\Omega_2 &\longmapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\,d\mu_1(x)\end{aligned}$$

sont respectivement $(\Omega_1,\mathcal{T}_1)$-$([0,\infty],\mathcal{B})$ *et* $(\Omega_2,\mathcal{T}_2)$-$([0,\infty],\mathcal{B})$ *mesurables et on a*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,d[\mu_1\otimes\mu_2](x,y) &= \int_{\Omega_1}\Big[\int_{\Omega_2} f(x,y)\,d\mu_2(y)\Big]\,d\mu_1(x)\\ &= \int_{\Omega_2}\Big[\int_{\Omega_1} f(x,y)\,d\mu_1(x)\Big]\,d\mu_2(y)\,.\end{aligned}$$

Sous les mêmes hypothèses sur les mesures μ_1 et μ_2 :

Théorème 2 (Fubini) *Soit f une fonction $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-$(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ mesurable et intégrable relativement à la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$. Pour μ_1 presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $f_x \ : y \in \Omega_2 \longmapsto f(x,y)$ est intégrable relativement à la mesure μ_2 ; de plus, la fonction*

$$x \longmapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)$$

(définie hors d'un sous-ensemble μ_1-négligeable de Ω_1) se prolonge en une fonction $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$-$(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ mesurable, intégrable relativement à la mesure μ_1, et l'on a la formule

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d[\mu_1 \otimes \mu_2](x,y) = \int_{\Omega_1} \Big[\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \Big]\, d\mu_1(x)\,.$$

Par symétrie des rôles de x et y, la fonction $f^y \ : x \in \Omega_1 \longmapsto f(x,y)$ est, pour μ_2 presque tout $y \in \Omega_2$, intégrable relativement à la mesure μ_1 ; de plus, la fonction

$$y \longmapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)$$

(définie hors d'un sous-ensemble μ_2-négligeable de Ω_2) se prolonge en une fonction $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$-$(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ mesurable, intégrable relativement à la mesure μ_2, et l'on a aussi la formule

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d[\mu_1 \otimes \mu_2](x,y) = \int_{\Omega_2} \Big[\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x) \Big]\, d\mu_2(y)\,.$$

Le théorème de Fubini s'applique presque toujours en « duo » avec le théorème de Fubini-Tonelli. C'est en effet ce dernier résultat (Fubini-Tonelli) qui permet, si l'on a vérifié au préalable la $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-$(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ mesurabilité d'une fonction $f \ : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ et que l'on se soit assuré de la validité de l'une <u>au moins</u> des trois inégalités

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \Big[\int_{\Omega_1} |f(x,y)|\, d\mu_1(x) \Big]\, d\mu_2(x) &< \infty \\
\int_{\Omega_1} \Big[\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\, d\mu_2(y) \Big]\, d\mu_1(x) &< \infty \\
\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(x,y)|\, d[\mu_1 \otimes \mu_2](x,y) &< \infty
\end{aligned}$$

(ces trois intégrales étant en fait égales dans $[0, \infty]$, peu importe donc celle que l'on calcule, on tente bien sûr la plus « accessible » !) d'assurer que l'on est bien dans les hypothèses du théorème de Fubini. Celui ci s'applique alors et l'on a la double égalité

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\, d[\mu_1\otimes\mu_2](x,y) &= \int_{\Omega_1}\Big[\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)\Big]\, d\mu_1(x)\\ &= \int_{\Omega_2}\Big[\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)\Big]\, d\mu_2(y)\end{aligned}$$

(cette fois <u>sans</u> les valeurs absolues dans l'intégrant $|f(x,y)|$!).
Soient ici $a = \mathrm{Re}\,\alpha > -1$, $b = \mathrm{Re}\,\beta > -1$. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}\iiint_{]0,1]^3} \frac{x^a y^b}{1-(1-xy)z}\, dxdydz &= \int_{]0,1[^2} x^a y^b \Big(\int_{]0,1[} \frac{dz}{1-(1-xy)z}\Big)\, dxdy\\ &= \int_{]0,1[^2}\Big(\int_{]0,1-xy[}\frac{du}{1-u}\Big)\frac{x^a\, y^b\, dxdy}{1-xy}\\ &= -\int_{]0,1[^2}\frac{x^a y^b\, \log(xy)\, dxdy}{1-xy} < +\infty.\end{aligned}$$

Mais $x^a y^b = |x^\alpha y^\beta|$ si $(x,y)\in]0,1[^2$. Ce qui précède montre que la « clause de sécurité » pour appliquer le théorème de Fubini est vérifiée. On peut donc s'affranchir des valeurs absolues dans ce qui précède et reprendre les calculs de manière identique, cette fois avec α en place de a, β en place de b. Le théorème utilisé cette fois est le théorème de Fubini (couplé avec la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue).

Exercice II

Thèmes : *Autour des inégalités de Hölder et Minkowski. Soit* $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ *un espace mesuré avec* $\mu(\Omega)\in]0,+\infty]$ *et* f,g *deux fonctions mesurables de* Ω *(équipé de la tribu* $\mathcal{T}$*) dans* $[0,\infty]$ *(équipé de la tribu borélienne* $\mathcal{B}([0,\infty])$*).*

II.1. *Soit* $P\in[1,+\infty]$*. Rappeler la définition de l'exposant conjugué de* P*. Que vaut cet exposant conjugué dans les deux cas extrêmes* $P=1$ *et* $P=+\infty$*. Énoncer les inégalités de Hölder, puis de Minkowski, impliquant les fonctions* f *et* g*, la mesure positive* μ*, et cet exposant* P *(on distinguera les deux cas extrêmes* $P=1$ *et* $P=+\infty$*).*

Par définition, si $P\in]1,+\infty[$, $1/P' = 1-1/P$. Si $P=1$, $P'=\infty$. Si $P=\infty$, $P'=1$. L'inégalité de Hölder impliquant f,g,μ,P s'énonce :

$$N_1(fg) = \int_\Omega fg\, d\mu \le N_P(f)\times N_{P'}(g)\,,$$

où N_P et $N_{P'}$ sont les normes de Minkowski (la norme $\| \ \|_\infty$ ou encore « sup essentiel » lorque le P concerné vaut $+\infty$) attachées à la mesure positive μ. Si $P \in]1, +\infty[$, on a

$$\int fg\, d\mu \leq \Big(\int_\Omega f^P \, d\mu \Big)^{1/P} \times \Big(\int_\Omega f^{P'} \, d\mu \Big)^{1/P'}. \qquad (*)$$

Si $P = 1$, cela donne

$$\int_\Omega fg\, d\mu \leq \|g\|_{\text{ess}} \times \int_\Omega |f| \, d\mu,$$

avec

$$\|g\|_{\text{ess}} = N_\infty(g) = \inf\{M \, ; \, g \leq M \quad \mu - \text{presque partout}\}.$$

Idem par symétrie si $P' = 1$ en renversant les rôles de f et g. Lorsque $P \in]1, \infty[$, l'égalité dans $(*)$ a lieu que si et seulement s'il existe des constantes positives ou nulles α, β telles que $\alpha f^P = \beta g^{P'}$ μ-presque partout.

On considère dans toute la suite de l'exercice $p \in]0, 1[$ *et l'on note* p' *le nombre réel (strictement négatif) tel que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

II.2. *On suppose que* f *et* g *sont à valeurs dans* $]0, \infty[$. *Montrer que*

$$\int_\Omega f^p \, d\mu > 0 \quad \text{et} \quad \int_\Omega g^{p'} d\mu > 0.$$

Montrer que l'on définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$ *en posant*

$$\forall\, A \in \mathcal{T} \, , \ \widetilde{\mu}(A) = \int_A g \, d\mu = \int_\Omega g \, \chi_A \, d\mu.$$

Écrire l'inégalité de Hölder rappelée à la question **II.1** *avec les fonctions* f^p *et* $1/g$*, la mesure* $\widetilde{\mu}$*, et l'exposant* $P = 1/p \in]1, +\infty[$ *(couplé avec son conjugué que l'on calculera). En déduire, modulo la convention habituelle* $0 \times \infty = 0$*, l'inégalité*

$$\int_\Omega fg\, d\mu \geq \Big(\int_\Omega f^p \, d\mu \Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega g^{p'} \, d\mu \Big)^{1/p'}. \qquad (4)$$

L'intégrale

$$\int_\Omega g^{p'} \, d\mu \qquad (\dagger)$$

est strictement positive car g est à valeurs finies (ce qui implique que $g^{p'}$ ne s'annule jamais) ; en effet, si l'intégrale (†) était nulle, $g^{p'}$ devrait s'annuler μ-presque partout, ce qui est impossible puisque $\Omega = \{g < \infty\}$ est supposé de mesure strictement positive. Le même raisonnement vaut pour montrer que

$$\int_\Omega f^p \, d\mu > 0$$

car $\Omega = \{f > 0\}$ est supposé de mesure strictement positive. L'inégalité (4) proposée a donc bien un sens (le second membre valant par convention 0 si $g^{p'}$ n'est pas intégrable).

On introduit la mesure positive $\widetilde{\mu}$ définie, pour $A \in \mathcal{T}$, par

$$\widetilde{\mu}(A) := \int_A g \, d\mu \, .$$

Il s'agit bien d'une mesure : c'est en effet une application de $\mathcal{T}$ dans $[0, \infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$. La propriété de σ-additivité résulte de la linéarité de l'intégrale et du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi.

L'inégalité de Hölder (voir **II.1**) appliquée suivant l'indication nous donne, si $P = 1/p$ et $P' = -p'/p$ (on a bien $1/P + 1/P' = 1$),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f^p \, d\mu = \int_\Omega f^p g^{-1} \, d\widetilde{\mu} \ &\leq \ \Big(\int_\Omega (f^p)^P d\widetilde{\mu}\Big)^{1/P} \times \Big(\int_\Omega g^{-P'} \, d\widetilde{\mu}\Big) \\
&\leq \ \Big(\int_\Omega f g \, d\mu\Big)^p \times \Big(\int_\Omega g^{1-P'} \, d\mu\Big)^{-p/p'} \, .
\end{aligned}$$

Or

$$1 - P' = 1 + \frac{p'}{p} = 1 + p'(1 - \frac{1}{p'}) = p' \, .$$

Finalement

$$\int_\Omega f^p \, d\mu \leq \Big(\int_\Omega f g \, d\mu\Big)^p \times \Big(\int_\Omega g^{p'} \, d\mu\Big)^{-p/p'} .$$

En prenant les racines p-èmes, on trouve

$$\Big(\int_\Omega f^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_\Omega f g \, d\mu\Big) \times \Big(\int_\Omega g^{p'} \, d\mu\Big)^{-1/p'} ,$$

inégalité que l'on divise ensuite par la quantité non nulle

$$\Big(\int_\Omega g^{p'} \, d\mu\Big)^{-1/p'}$$

(si cette quantité est finie) pour obtenir l'inégalité voulue (4) ; au cas où

$$\int_\Omega g^{p'}\,d\mu = \infty$$

on a

$$\Big(\int_\Omega g^{p'}\,d\mu\Big)^{1/p'} = 0,$$

et l'inégalité (4) proposée est bien sûr satisfaite car le membre de gauche est nul au vu de la convention $0\times\infty = 0$ adoptée.

II.3. *On ne suppose plus que f, g sont à valeurs dans $]0,\infty[$ (mais toujours que f et g sont mesurables et à valeurs dans $[0,\infty]$). En introduisant les suites croissantes de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où*

$$f_n = f\times\chi_{\{1/n\le f\le n\}}\,,\quad g_n := g\times\chi_{\{1/n\le g\le n\}},$$

et en utilisant le théorème de convergence monotone (dont on rappelera l'énoncé), montrer que l'inégalité (4) reste valable (toujours sous l'hypothèse $0\times\infty = 0$).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si l'on pose $f_n = f\chi_{\{1/n\le|f|\le n\}}$ et $g_n = g\chi_{\{1/n\le|g|\le n\}}$, on a, d'après la formule (4) établie à la question **II.2**, l'inégalité de Hölder inversée

$$\int_\Omega f_n g_n\,d\mu \ge \Big(\int_\Omega f_n^p d\mu\Big)^{1/p}\times\Big(\int_\Omega g_n^{p'}\,d\mu\Big)^{p'} \ge \Big(\int_\Omega f_n^p d\mu\Big)^{1/p}\times\Big(\int_\Omega g^{p'}\,d\mu\Big)^{p'}. \tag{††}$$

Si $\int_\Omega g^{p'}\,d\mu = 0$, on a $g^{p'} = 0$ μ-presque partout, c'est-à-dire $g = +\infty$ μ-presque partout ; de deux choses l'une dans ce cas : soit $f\equiv 0$ μ-presque partout et les deux membres de l'inégalité (4) sont nuls (car $fg = 0$ μ-presque partout avec la règle $0\times\infty$) ; soit $\mu(\{f>1/N\})>0$ pour au moins un $N\in\mathbb{N}^*$ et dans ce cas les deux membres de (4) valent $+\infty$.

Si $\int_\Omega g^{p'}\,d\mu > 0$, on obtient l'inégalité (4) en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité (††), puis en utilisant le théorème de Beppo-Levi qui assure

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_\Omega f_n g_n\,d\mu\Big) &= \int_\Omega fg\,d\mu\\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_\Omega f_n^p\,d\mu\Big)^{1/p} &= \Big(\int_\Omega f^p\,d\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

On rappelle ici l'énoncé du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi (extrait du cours) :

Théorème 3 (Beppo Levi ou convergence croissante) *Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante de fonctions $(\Omega, \mathcal{T})$-$([0,\infty], \mathcal{B})$ mesurables sur un ensemble Ω équipé d'une tribu $\mathcal{T}$ et f la limite de la suite f_k lorsque k tend vers $+\infty$. Alors f est aussi $(\Omega, \mathcal{T})$-$([0,\infty], \mathcal{B})$ mesurable et, si $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow [0,\infty]$ est une mesure positive, on a*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \left(\int_\Omega f_k\, d\mu \right) \in [0,\infty]\,.$$

II.4. *En utilisant l'inégalité (4) avec les fonctions f et $f+g$ en place respectivement de f et g, puis les fonctions g et $f+g$ respectivement en place de f et g, montrer que l'on a l'inégalité :*

$$\Big(\int_\Omega (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1/p} \geq \Big(\int_\Omega f^p\, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega g^p\, d\mu\Big)^{1/p}. \tag{5}$$

On écrit

$$\int_\Omega (f+g)^p\, d\mu = \int_\Omega (f+g)^{p-1} f\, d\mu + \int_\Omega (f+g)^{p-1}\, g\, d\mu\,.$$

On applique ensuite deux fois Hölder inversée établie à la question précédente (en introduisant $p' < 0$ tel que $1/p + 1/p' = 1$) pour obtenir par exemple

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(f+g)^{p-1}\, d\mu \ &\geq\ \Big(\int_\Omega f^p\, d\mu\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega (f+g)^{p'(p-1)}\Big)^{1/p'} \\
&\geq\ \Big(\int_\Omega f^p\, d\mu\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega (f+g)^{p}\Big)^{1/p'} \\
&\geq\ \int_\Omega (f+g)^{p-1} g\, d\mu \\
&\geq\ \Big(\int_\Omega g^p\, d\mu\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega (f+g)^{p'(p-1)}\Big)^{1/p'} \\
&\geq\ \Big(\int_\Omega g^p\, d\mu\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega (f+g)^{p}\Big)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

On obtient une inégalité similaire permutant les rôles de f et g. L'inégalité voulue s'obtient en ajoutant ces deux inégalités et en reportant au membre de droite. On divise pour terminer par $(\int_\Omega (f+g)^p\, d\mu)^{1/p'} > 0$ (ce qui est licite car on peut supposer que $f+g$ n'est pas nulle μ-presque partout). On obtient ainsi

$$\Big(\int_\Omega (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1-1/p'} \geq \Big(\int_\Omega f^p\, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega g^p\, d\mu\Big)^{1/p},$$

ce qui est l'inégalité (5) voulue car $1 - 1/p' = 1/p$.

II.5. *Montrer que l'ensemble des fonctions mesurables* $(\Omega, \mathcal{T}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurables telles que*

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty$$

est un $\mathbb{R}$*-espace vectoriel que l'on notera* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$*. L'application*

$$f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \mapsto \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}$$

est-elle une norme sur cet espace vectoriel $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *? (on rappelle que* $p \in]0, 1[$*).*

Le fait que $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel résulte de l'inégalité :

$$(\alpha + \beta)^p \leq (2 \max(\alpha, \beta))^p \leq (\alpha^p + \beta^p)$$

(lorsque $\alpha, \beta, p > 0$). Si l'application

$$f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \mapsto \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}$$

était une norme sur $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, on aurait, pour toutes fonctions positives f, g dans $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, l'égalité de Minkowski

$$\Big(\int_\Omega (f+g)^p \, d\mu \Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega f^p \, d\mu \Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega g^p \, d\mu \Big)^{1/p} \qquad (6)$$

(une des inégalités vient de l'inégalité (5), l'autre viendrait de l'inégalité triangulaire supposée valide si l'on avait affaire à une norme). En remontant la chaîne d'inégalités permettant de passer de l'inégalité de Hölder renversée (4) à l'inégalité de Minkowski renversée (5), on trouve que l'égalité dans (5) correspond à l'égalité dans l'inégalité (4) appliquée avec les couples $(f, (f+g)^{p-1})$ et $(g, (f+g)^{p-1})$. En remontant encore les calculs, on se rend compte que ces cas d'égalité correspondent à des cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder classique (avec $P \in]1, \infty[$. Ces cas d'égalité sont en défaut en général. Il en résulte que

$$f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \mapsto \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}$$

ne saurait être une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice III

Thème : *espaces de Minkowski, inégalité de Markov. Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(\Omega) < +\infty$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions* $(\Omega, \mathcal{T})$-$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurables. On suppose qu'il existe un réel* $p \in [1, +\infty[$ *et une constante* $C > 0$ *telles que toutes les fonctions* f_n *soient dans* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *et que*

$$\Big(\int_\Omega |f_n - f_m|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}^*.$$

III.1. *Pourquoi la suite* $(\dot{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle dans* $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *vers un élément* $\dot{f}$ *? On choisit pour la suite un représentant* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *de* $\dot{f}$.

L'hypothèse implique que la suite $(\dot{f}_n)_{n\geq 0}$ de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est de Cauchy dans cet espace de Banach ; elle est donc convergente d'après le théorème de Riesz-Fischer vers un élément $\dot{f}$ de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

III.2. *Après avoir énoncé l'inégalité de Markov, montrer que l'on a, pour tout* $\epsilon > 0$, *l'inégalité*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) \leq \frac{\mu(\Omega)^{1-1/p}}{n\,\epsilon}.$$

L'inégalité de Markov s'énonce comme suit : étant donnée un élément g de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et un seuil $\epsilon > 0$, on a

$$\mu(\{|g| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{\{|g|\geq\epsilon\}} |g|\, d\mu \leq \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |g|\, d\mu. \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

En gelant n et en faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité

$$\Big(\int_\Omega |f_n - f_m|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}^*,$$

il vient $\Big(\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq C/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de Hölder (c.f. **I.1**), on a donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_n - f|\, d\mu &= \int_\Omega (|f_n - f| \times 1)\, d\mu \\
&\leq \Big(\int_\Omega |f_n - f|^p\, d\mu\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-1}}\, d\mu\Big)^{1-1/p} \\
&\leq \frac{C}{n} \times (\mu(\Omega))^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

On conclut en combinant cette inégalité avec l'inégalité de Markov $(\dagger\dagger\dagger)$ écrite pour $g = f_n - f$, $n \in \mathbb{N}^*$.