Fascicule d'exercices pour l'UE MHT734 (Analyse Complexe), Semestre d'automne, 2010-2011 [1]

Alain Yger

16 septembre 2011

[1]Le cours est dispensé par Philippe Charpentier. Les principales référen ces utilisées pour préparer ce recueil d'exercices de TD ont été l'ouvrage de Carlos Berenstein et Roger Gay [*Complex Variables, an introduction*, GTM 125, Springer-Verlag 1991], celui d'Eric Amar et Etienne Matheron [*Analyse Complexe*, Cassini, 2004], enfin l'ouvrage que j'ai publié en 2001 [*Analyse Complexe et Distributions*, Mathématiques pour le second cycle, Ellipses, 2001]. Les étoiles $(*)$ astérisquant chaque exercice indiquent son niveau de difficulté.

Table des matières

Chapitre 1

Formes différentielles et champs de vecteurs

Les exercices proposés dans ce chapitre illustrent la section 1 du chapitre I du cours ("*Formes différentielles, homotopie*").

Exercice 1.1 (*) : la dualité champ de vecteurs/1-formes différentielles et les "coordonnées" $(z, \overline{z})$ en place de (x, y).

a) Un champ de vecteurs complexe dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ s'exprime sous la forme

$$u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

où u et v sont deux fonctions de U dans $\mathbb{C}$[1]. Vérifier qu'un tel champ s'exprime aussi sous la forme

$$a(z)\frac{\partial}{\partial z} + b(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,,$$

où les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \overline{z}$ sont définis par

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\Big) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

et $z = x + iy$. Calculer a et b en fonction de u et v.

b) Le crochet de dualité entre le champ de vecteurs $u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y$ et la 1-forme différentielle $Pdx + Qdy$ (P et Q étant des fonctions de U dans $\mathbb{C}$) est défini ponctuellement par

$$\Big\langle u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\,,\, Pdx + Qdy\Big\rangle_{(x,y)} = u(x,y)P(x,y) + v(x,y)Q(x,y).$$

Vérifier que l'on a, pour tout (x, y) dans U,

$$\begin{aligned}\Big\langle \frac{\partial}{\partial x}, dx\Big\rangle_{(x,y)} &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial y}, dy\Big\rangle_{(x,y)} = 1\\ \Big\langle \frac{\partial}{\partial z}, dz\Big\rangle_{z} &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, d\overline{z}\Big\rangle_{z} = 1\end{aligned}$$

[1]Dans votre cours, vous considerez qu'un champ de vecteurs complexe sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est une application de U dans $\mathbb{C}^2$, celle qui à (x, y) associe $(u(x, y), v(x, y))$. Les deux points de vue (celui ci et celui de votre cours) reviennent au même en ce qui concerne la définition des champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Cela change par contre si l'on se place sur une surface ; seul celui présenté ici garde un sens.

si $dz : dx + idy$ et $d\overline{z} : dx - idy$, ainsi que

$$\begin{aligned}\Big\langle \frac{\partial}{\partial x}, dy\Big\rangle_{(x,y)} &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial y}, dx\Big\rangle_{(x,y)} = 0\\ \Big\langle \frac{\partial}{\partial z}, d\overline{z}\Big\rangle_{z} &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, dz\Big\rangle_{z} = 0.\end{aligned}$$

Exercice 1.2 (*) : le "yoga" des calculs en les coordonnées z et $\overline{z}$. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ (les coordonnées y étant respectivement dénotées z et w), f une fonction différentiable de U dans V, g une fonction différentiable de V dans $\mathbb{C}$. Exprimer $\partial(g \circ f)/\partial z$ et $\partial(g \circ f)/\partial \overline{z}$ en fonction de f, g, $\partial f/\partial z, \partial f/\partial \overline{z}$, $\partial g/\partial w, \partial g/\partial \overline{w}$.
Indication : *exprimer plutôt l'action de la différentielle de $g \circ f$ sur*

$$h = (h_1, h_2) \longleftrightarrow h_1 + ih_2.$$

Exercice 1.3 (*) : le laplacien dans le plan ; coordonnées cartésiennes et polaires.
a) Vérifier que, pour toute fonction F de classe C^2 et à valeurs complexes dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big)[F] = \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z}\Big)[F] = \frac{1}{4}\Delta[F]\,,$$

où

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

désigne l'opérateur de Laplace (ou *laplacien*) en dimension 2.
b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et Ω son image réciproque par l'application

$$(r,\theta) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Vérifier que si F est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a, pour $(r,\theta) \in \Omega$,

$$\Delta_{(x,y)}[F](r\cos\theta, r\sin\theta) = \Bigg(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\Bigg)[G](r,\theta)$$

si $G(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Déterminer toutes les fonctions F de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, radiales ($F(x,y)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2}$), et solutions de $\Delta[F] \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
c) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et f une fonction de classe C^2 de U dans $\mathbb{C}$; on note toujours Ω cette fois l'image réciproque de U par l'application

$$(r,\theta) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \longmapsto re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*.$$

Vérifier que, si f est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a, pour tout (r,θ) dans Ω,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[f](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)[g](r,\theta)\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}[f](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)[g](r,\theta).\end{aligned}$$

Vérifier que, si $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la fonction

$$f_{\theta_0} \ : z = (x+iy) \longmapsto \log|z| + i \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)$$

est une fonction de classe C^2 dans $U_{\theta_0} := \mathbb{C} \setminus \{te^{i\theta_0}\ ;\ t \geq 0\}$, telle que $(\partial/\partial\overline{z})[f_{\theta_0}] \equiv 0$ dans U_{θ_0}.

Exercice 1.4 (**) : fonctions positivement homogènes. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré $r \in \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pour tout $t > 0$, on a

$$f(tx) = t^r f(x).$$

a) Montrer que si f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$, dire qu'elle est positivement homogène de degré $r \in \mathbb{R}$ équivaut à dire qu'elle satisfait l'*équation d'Euler* :

$$df(x).x = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = r f(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

b) Si g est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, positivement homogène de degré $r > 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, trouver toutes les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$df(x).x = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = g(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 1.5 (*) : le "pullback" d'une forme différentielle. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et Φ une application de classe C^1 de U dans V. Exprimer $\Phi^*[d\overline{z} \wedge dz]$ en termes de $|\partial\Phi/\partial z|$ et de $|\partial\Phi/\partial\overline{z}|$.

Exercice 1.6 (*) : formes exactes, formes fermées. La 1-forme

$$\omega = 2xzdx + 2yzdy - (x^2 + y^2 + 1)dz$$

est-elle fermée dans $\mathbb{R}^3$? exacte ? Trouver explicitement un *facteur intégrant*, c'est-à-dire une fonction $F\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tel que $F\omega$ soit exacte dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.7 (*) : formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$). Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la forme

$$\omega_\alpha := \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{|z|^\alpha}\,,\ z = x + iy\,,$$

est elle fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? exacte dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Exercice 1.8 (*) : formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{C}$; montrer que $f(z)\,dz$ est fermée si et seulement si $\partial f/\partial\overline{z} \equiv 0$ et que $f(z)d\overline{z}$ est fermée si et seulement si $\partial f/\partial z \equiv 0$.

Exercice 1.9 (**) : formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$).

a) Soit p un entier relatif et $\omega_p = z^p dz$, considérée comme une 1-forme de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour quelles valeurs de p cette forme est-elle fermée dans $\mathbb{C}^*$? exacte dans $\mathbb{C}^*$? Pour les valeurs de p pour lesquelles elle est exacte, déterminer toutes les fonction $F\ : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, de classe C^1, telles que $dF = \omega_p$ dans $\mathbb{C}^*$.

b) Soit θ_0 un nombre réel, U_{θ_0} l'ouvert

$$U_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\theta_0}\,;\, t \geq 0\}$$

(le plan complexe "fendu" le long de la demi-droite issue de l'origine et dirigée par $e^{i\theta_0}$) et, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la 1-forme différentielle dans U_{θ_0} définie par

$$\omega_\alpha(z) = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)}\, dz.$$

Pourquoi cette forme est-elle exacte dans U_{θ_0} quelque soit la valeur de α ? Vérifier en utilisant le résultat établi à l'exercice **3.c)** que les fonctions F de classe C^1 dans U_{θ_0} telles que $dF = \omega_\alpha$ sont de la forme

$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \frac{|z|^{\alpha+1}}{\alpha+1} \exp\Big(i(\alpha+1)\arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)\Big)$$

si $\alpha \neq -1$ (C étant une constante arbitraire) et de la forme

$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \log|z| + i \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)$$

si $\alpha = -1$ (C désignant toujours une constante arbitraire).

Exercice 1.10 (**) : formes différentielles et équations différentielles. Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et $Pdx + Qdy$ une 1-forme de classe C^1 fermée dans U. Écrire ce que cela signifie sur P et Q. On désigne par F une primitive de $Pdx+Qdy$ dans U, c'est-à-dire une fonction de classe C^2 dans U telle que $dF = Pdx + Qdy$. Pourquoi existe-t-il bien une telle primitive ? Quelle est l'équation cartésienne du graphe de la solution maximale du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

lorsque (x_0, y_0) est un point de U où Q ne s'annule pas ?

Exercice 1.11 (***) : la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^2$ pour un simplexe "tordu" positivement orienté. Soit Δ_0 le simplexe

$$\Delta_0 := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2\,;\, t \geq 0, s \geq 0, t+s \leq 1\}$$

et $\Phi = (\varphi, \psi)$ une application de classe C^2 au voisinage de Δ_0, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $d\Phi(t,s)$ soit inversible en tout point de Δ_0 et de jacobien strictement positif en tout point. On suppose aussi que Φ réalise une bijection entre $\overline{\Delta_0}$ et $\Phi(\overline{\Delta_0})$. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une 1-forme de classe C^1 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta_0})$, vérifier la formule de Stokes (ou de Green-Riemann puisque l'on est ici en dimension 2) :

$$\begin{aligned}
\iint_{\Phi(\overline{\Delta_0})} d[Pdx+Qdy] &= \iint_{\Phi(\overline{\Delta_0})} d[Pdx+Qdy] \\
&= \iint_{\Phi(\overline{\Delta_0})} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx \wedge dy \\
&:= \iint_{\Phi(\overline{\Delta_0})} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy \\
&= \iint_{\Phi(\Delta_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy \\
&= \iint_{\Delta_0} \Phi^*[d\omega] = \int_{\partial\Delta_0} \Phi^*[\omega] = \int_{\partial[\Phi(\overline{\Delta_0})]} (Pdx+Qdy)
\end{aligned}$$

après avoir justifié le fait que la frontière $\partial[\Phi(\overline{\Delta_0})]$ de $\Phi(\overline{\Delta_0})$ est C^1 par morceaux (les frontières sont ici toutes orientées dans le sens trigonométrique).
Indication : *on traitera dans un premier temps le cas où* Φ *est l'identité de* $\mathbb{R}^2$ *dans lui-même.*
Peut-on s'affranchir de la condition "ω de classe C^2 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta_0})$" et la remplacer par la condition plus faible "ω de classe C^1 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta_0})$" ?

Exercice 1.12 (*) : retour au lemme de Schwarz sur la symétrie des dérivées partielles. Dans l'exercice précédent, le lemme de Schwarz (sur le fait que l'on puisse permuter l'action de $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ pour une fonction deux fois différentiable en un point) a joué un rôle essentiel (même s'il est caché par la propriété $d \circ d = 0$) pour prouver

$$\iint_{\Phi(\Delta_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy = \iint_{\Delta_0} \Big(\frac{\partial A}{\partial s} - \frac{\partial B}{\partial t}\Big)\, dsdt$$

si $Ads + Bdt := \Phi^*[Pdx + Qdy]$ comme conséquence de la formule de changement de variables dans l'intégration relativement à la mesure de Lebesgue. Dans cet exercice, nous proposons de montrer pourquoi la formule de Green-Riemann pour les rectangles suffit à impliquer le lemme de Schwarz.

a) Montrer que si G_1 et G_2 sont deux fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que

$$\iint_R G_1(x,y)\, dxdy := \iint_R G_2(x,y)\, dxdy$$

pour tout rectangle fermé plein R inclus dans U, alors $G_1 \equiv G_2$ dans U.

b) Déduire de **a)** que si F est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs complexes, alors on a $(\partial^2/\partial x\partial y)[F] \equiv (\partial^2/\partial y\partial x)[F]$ dans U.

Exercice 1.13 (*) : appliquer le lemme de Poincaré pour les 1-formes (en dimension n). Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ et $F\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 ne s'annulant pas. Montrer que la 1-forme dF/F est exacte dans U.

Exercice 1.14 (*) : facteurs intégrants locaux dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit ω une 1-forme de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que $\omega(z_0) \neq 0$ (ce qui signifie $(P(x_0,y_0), Q(x_0,y_0)) \neq 0$ si $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$). Montrer qu'il existe un voisinage $V_{(x_0,y_0)}$ de (x_0,y_0) dans U, une fonction f_{x_0,y_0} de classe C^1 dans ce voisinage, telle que la forme $f_{(x_0,y_0)} \times \omega$ soit exacte dans $V_{(x_0,y_0)}$.
Indication : *on effectuera un changement de variable de manière à ce que (localement)* $\omega = Pdx$*, puis on exploitera le lemme de Poincaré dans un ouvert étoilé.*

Exercice 1.15 (***) : autour du lemme de Poincaré dans $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, étoilé par rapport à l'origine, et ω

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

une p-forme de classe C^1 dans U. Montrer que l'on définit une $(p-1)$-forme $I[\omega]$ de classe C^2 sur U en posant

$$I[\omega] = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \Big[\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \Big(\int_0^1 t^{p-1} \alpha(tx_1, ..., tx_n)\, dt\Big)\, x_{i_k} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{p} dx_{i_l}\Big].$$

Vérifier la formule $I[d\omega] + d[I[\omega]] = \omega$ et en déduire le lemme de Poincaré.
Indication : *expliquer d'abord pourquoi il est possible de se ramener à supposer la forme* ω *du type* $\omega = \alpha\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$.

Exercice 1.16 (*) : une application directe de Green-Riemann. Soit Γ le bord du carré $[-1,1]^2$ orienté dans le sens trigonométrique. Calculer

$$\int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}\,.$$

Indication : *remarquer que la* 1*-forme sous cette intégrale curviligne est fermée dans* $\mathbb{C}^*$ *et que par conséquent on peut remplacer* $[-1,1]^2$ *par le disque de centre* 0 *et de rayon* ϵ, *avec* ϵ *arbitraire ; on expliquera pourquoi.*

Exercice 1.17 (**) : encore une application directe de Green-Riemann. Calculer l'aire de la boucle du folium de Descartes d'équation cartésienne

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(a désignant un paramètre réel).
Indication : *on paramètrera cette courbe en cherchant le point d'intersection avec la droite d'équation* $y = tx$, t *désignant le paramètre que l'on utilisera ; la boucle correspond, on le montrera, aux valeurs du paramètre entre* 0 *et* $+\infty$.

Exercice 1.18 (**) : de Green-Riemann à Green-Ostrogradski. Soit U un ouvert borné du plan dont la frontière est consititué d'un nombre fini de lacets simples (courbes de Jordan) $\gamma_1, ..., \gamma_N$, de classe C^1 et réguliers (chaque lacet est paramétré par une fonction $\gamma\ : t \in [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$ de classe C^1 sur $[0,1]$ et telle que $d\gamma$ ne s'annule en aucun point de $[0,1]$). Soit $F = (P,Q) = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$ un champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\overline{U}$. Vérifier la formule de Green-Ostrograski :

$$\iint_U \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, dxdy = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \langle n_{\rm ext}(\gamma_j(t)), F(\gamma_j(t))\rangle\, |\gamma_j'(t)|\, dt\,,$$

où $n_{\rm ext}(\gamma_j(t))$ désigne le vecteur normal unitaire (pointant vers l'extérieur de U) à l'arc géométrique paramétré par γ_j et $\langle\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, en langage de physicien, l'intégrale (surfacique) de la divergence du champ de vecteurs F est égal au flux sortant de ce champ au travers du bord.
Indication : *on appliquera Green-Riemann avec la forme* $Pdy - Qdx$.

Exercice 1.19 (***) : une approche au théorème du point fixe de L. Brouwer. Soit $f = (P,Q)$ une application définie et de classe C^2 au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et telle que

$$f(\overline{D(0,1)}) \subset \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 = 1\} = \partial\overline{D}$$

(f réalise une *rétraction* du disque fermé sur son bord).
a) Si l'on suppose en plus des hypothèses ci-dessus que la restriction de f à $\partial\overline{D(0,1)}$ est l'identité, déduire de la formule de Green-Riemann que, si γ désigne le lacet $\theta \in [0,2\pi] \mapsto e^{i\theta}$,

$$\int_\gamma PdQ = 0.$$

Indication : *on montrera que la forme $Pdx + Qdy$ est fermée dans le disque unité ouvert $D(0,1)$.*
Montrer que l'hypothèse additionnelle implique $\gamma^*[PdQ] = \gamma^*[xdy]$ et en déduire

$$\int_\gamma PdQ = \pi\,.$$

Que peut-on en conclure ?

b) Soit F une application définie et de classe C^2 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $F(\overline{D(0,1)}) \subset \overline{D(0,1)}$ et que $F(x,y) \neq (x,y)$ pour tout (x,y) dans $\overline{D(0,1)}$. Pour tout (x,y) dans $\overline{D(0,1)}$,on note $G(x,y)$ le point d'intersection du cercle unité $\partial\overline{D(0,1)}$ avec la demi-droite issue de $F(x,y)$ et dirigée par le vecteur (non nul par hypothèses) $(x,y) - F(x,y)$. Vérifier que $(x,y) \mapsto G(x,y)$ se prolonge en une fonction (P,Q) de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ qui vérifie les hypothèses de l'en-tête de l'exercice et du **(a)**. En déduire que F admet nécesssairement un point fixe dans $\overline{D(0,1)}$ (*i.e.* un point (x_0,y_0) tel que $F(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$).

Exercice 1.20 (**) : primitives de formes et connexité. Soient $U_1, ..., U_N$ des ouverts de $\mathbb{C}$ tels que, pour chaque $k = 1, ..., N-1$, l'intersection de $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ avec U_{k+1} soit connexe. Soit ω une 1-forme continue sur l'union des U_k. Montrer qu'il est équivalent de dire que ω est exacte et de dire que, pour chaque $k = 1, ..., N$, la restriction de ω à U_k est exacte.

Exercice 1.21 (**) : la division des formes.

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), f une fonction de classe C^1 dans U telle que $df(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Soit $p \geq 2$ et ω une p-forme continue sur U. Montrer qu'il existe une $(p-1)$-forme ξ continue sur U telle que $\omega = df \wedge \xi$. Trouver toutes les $p-1$-formes continues solutions de l'équation $df \wedge \xi = 0$.

b) À quelle condition une 2-forme continue $\omega = F dx \wedge dy$ dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ s'écrit-elle sous la forme $\omega = d|z|^2 \wedge \xi$, où ξ est une 1-forme continue sur U (on distinguera les cas où $0 \in U$ et $0 \notin U$) ?

Chapitre 2

Intégration des formes sur les chemins continus

Cette seconde série d'exercices correspond essentiellement au contenu des sections 2,3,4 du chapitre I ("*Formes différentielles, Homotopie*") du cours. Elle illustre l'intégration des formes localement exactes sur les chemins continus, la notion d'indice, le théorème de Rouché, les concepts de simple connexité et de logarithme dans le champ complexe, enfin la formule de Cauchy Pompeïu et ses conséquences. Les exercices **2.21** à **2.23** constituent un préambule à la formule de Cauchy introduite au chapitre II du cours ("*Fonctions holomorphes*").

Exercice 2.1 (*) : homotopie à point de base marqué et groupes $\pi_1(U,a)$. Soit U un ouvert connexe non vide et, pour $a \in U$, $\pi_1(U,a)$ le *groupe d'homotopie à point de base a*, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des lacets continus γ de support dans U, d'origine et d'extrémité "marquées" a pour la relation d'équivalence suivante : γ_0 est homotope à γ_1 si et seulement si il existe une fonction F continue $F\ : [0,1] \times [0,1] \to U$ telle que

$$\begin{aligned} F(0,s) = F(1,s) = a \quad & \forall\ s \in [0,1] \\ F(t,0) = \gamma_0(t) \quad , \quad F(t,1) = \gamma_1(t) \quad & \forall\, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

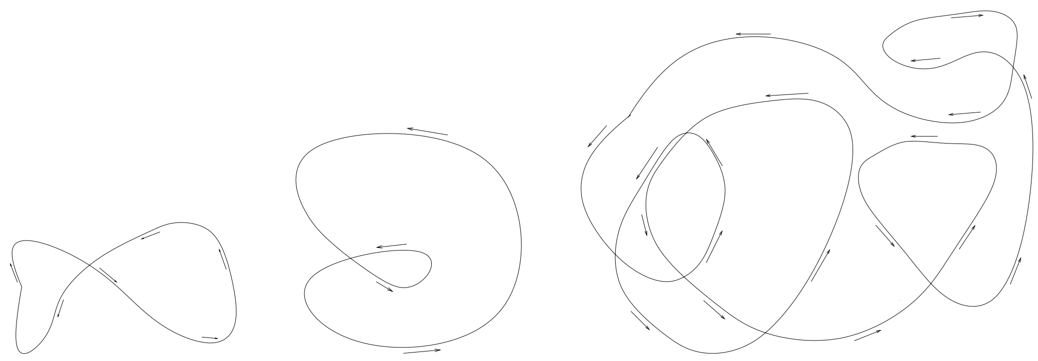
Montrer que, si a et b sont deux points distincts de U, $\pi_1(U,a)$ et $\pi_1(U,b)$ sont isomorphes.

Exercice 2.2 (*) : $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ peuvent-ils être homéomorphes ?
Indication : *on calculera pour ces deux ouverts le groupe d'homotopie $\pi_1(U,a)$ pour un point arbitraire a dans U (ces deux ouverts étant connexes, on sait d'après l'exercice* **2.1** *que ce groupe d'homotopie ne dépend pas du choix du point a dans l'ouvert).*

Exercice 2.3 (**) : la notion d'indice : le calcul "visuel".
On considère les lacets γ représentés sur les figures ci-dessous ; calculer, dans chaque composante connexe du complémentaire du support de chacun de ces lacets, la valeur de la fonction

$$z \longmapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

Tenter d'énoncer à partir de ces trois exemples une règle générale pour calculer $I(\gamma,z)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$) en examinant comment une demi-droite arbitraire issue de z (demi-droite qu'il est judicieux de choisir intelligemment de manière à ce qu'elle ne rencontre le support de γ qu'en des points non multiples, de manière transverse,



et que ce nombre de points d'intersection soit le plus petit possible) intersecte le support du lacet orienté γ.

Exercice 2.4 (*) : des calculs d'indice pas si surprenants que cela. On rappelle qu'il existe une application continue surjective de $[0,1]$ dans $[-1,1]^2$ telle que $\gamma(0) = (-1,-1)$ et $\gamma(1) = (1,1)$; c'est la courbe introduite par G. Peano. Soit C la couronne fermée du plan complexe $C := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 1 \leq |z| \leq 2\}$ et C^- et C^+ les deux demi-couronnes fermées définies par $C^- := C \cap \{z\,;\, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$ et $C^+ := C \cap \{z\,;\, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. En utilisant la courbe de Peano, construire un chemin continu $\gamma^+ : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^+, tel que $\gamma^+(0) = 2$, $\gamma^+(1) = -1$, puis un chemin continu $\gamma^- : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^- tel que $\gamma^-(0) = -1$, $\gamma^-(1) = 2$. On note γ le lacet de $\mathbb{C}^*$ obtenu en concaténant (dans cet ordre) γ^+, puis γ^-. Que vaut l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$? Même question en demandant à 1 (et non plus -1) d'être l'extrémité du lacet γ^+ et en même temps l'origine de γ^-.

Exercice 2.5 (*) : variation de l'argument. Soient $a_1, ..., a_N$ N points du disque unité ouvert. Quel est le bilan global de la variation de l'argument le long du lacet

$$t \in [0,1] \longmapsto \prod_{j=1}^{N} \frac{e^{2i\pi t} - a_j}{1 - \overline{a_j} e^{2i\pi t}} \ ?$$

Même questions si les a_j sont tous de module strictement supérieur à 1.

Exercice 2.6 (*) : variation de l'argument. Construire une détermination continue de l'argument dans $\mathbb{C}$ privé de l'union de $[0,1]$ et du support du chemin paramétré $\Gamma : t \in [0,\infty[\mapsto f(t)e^{it}$, où f est un homéomorphisme croissant entre $[0,+\infty[$ et $[1,+\infty[$.

Indication : *on pourra faire un dessin (on retire à $\mathbb{C}$ une courbe se déroulant en spirale), par exemple en prenant $f(t) = t+1$.*

Même question, mais cette fois dans $\mathbb{C}$ privé de l'adhérence de l'ensemble $\{f(t)e^{it}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$, où f est un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $]0,\infty[$ (par exemple $f(t) = \exp t$).

Exercice 2.7 (**) : indice et homotopie entre lacets dans $\mathbb{C}^*$ (à point de base marqué ou libre).

a) Soient γ_0 et γ_1 deux lacets continus de $\mathbb{C}^*$, tels que $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = \gamma_1(1) = a \in \mathbb{C}^*$, ayant même degré, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)$. Montrer que γ_0 et γ_1 sont des représentants du même élément du groupe d'homotopie $\pi_1(\mathbb{C}^*, a)$.

b) Soient γ_0 et γ_1 deux lacets continus de $\mathbb{C}^*$ ayant même degré. Montrer que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ pour l'homotopie entre lacets libres, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $F\ : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \gamma_0(t) \quad , \quad F(t,1) = \gamma_1(t) \quad \forall\, t \in [0,1] \\ F(0,s) &= F(1,s) \quad \forall\, s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Exercice 2.8 (*) : lacets de $\mathbb{C}^*$ et lacets tracés sur le cercle unité.

a) Montrer que tout lacet continu de $\mathbb{C}^*$ est homotope dans l'homotopie entre lacets libres (dans $\mathbb{C}^*$) à un lacet de support inclus dans le cercle unité.

b) Montrer que tout lacet continu γ de $\mathbb{C}^*$ est homotope au lacet

$$t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi \mathrm{Ind}(\gamma,0)t}.$$

Exercice 2.9 (*) : théorème de Rouché (illustré par G. Pólya). Un passant tenant son chien en laisse se déplace autour d'un rond-point de rayon R (il n'est pas autorisé à piétiner le disque central gazonné – de rayon R – de ce rond-point. La longueur de la laisse est $l < R$. Le chien peut, lui, marcher partout (sur le gazon comme sur la chaussée). Au terme d'un parcours indéfini, mais continu, le maître et son chien sont exactement revenus à leurs positions initiales. Si le maître a fait N tours autour du rond-point, combien le chien a-t-il fait de tours autour du centre 0 de ce même rond point ?

Exercice 2.10 (*) : calcul mathématique de l'indice ; théorème de Rouché. Soit l'arc paramétré

$$\gamma\ : t \in [0,1] \longmapsto (1 + t(1-t))e^{4i\pi t}.$$

Vérifier qu'il s'agit d'un lacet de $\mathbb{C}^*$ et calculer $I(\gamma, 0)$ dans un premier temps par le calcul d'une intégrale curviligne. Dessiner ensuite γ et retrouver ce résultat.

Exercice 2.11(*) : théorème fondamental de l'algèbre, preuve géométrique. Soit P un polynôme de degré $d > 0$. Montrer que, si R est assez grand, le lacet

$$\gamma_R\ : t \in [0,1] \longmapsto P(Re^{2i\pi t})$$

est de support inclus dans $\mathbb{C}^*$ et que le degré de ce lacet, c'est-à-dire l'indice $I(\gamma_R, 0)$, vaut exactement d. Vérifier que, si P ne s'annulait pas dans $\mathbb{C}$, le lacet γ_R serait homotope dans $\mathbb{C}^*$ (dans l'homotopie entre lacets libres définie à l'exercice 7) au lacet constant $t \in [0,1] \longmapsto P(0)$. En déduire une démonstration géométrique du théorème de d'Alembert (*tout polynôme de degré strictement positif à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*).

Exercice 2.12 (**) : variation de l'argument, comptage de zéros.
Soit $0 \le a_0 < a_1 < ... < a_n$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs et $P(X) := a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$. En considérant, si $P(z) = 0$, la ligne polygonale fermée de sommets $0, a_0, a_0 + a_1 z, a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}, 0$, montrer que les zéros de P sont tous dans le disque unité ouvert $D(0,1)$. Calculer la variation totale de l'argument le long du lacet $\Gamma\ : \theta \in [0, 2\pi] \longmapsto P(e^{i\theta})$. En déduire que l'équation

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = 0$$

a exactement $2n$ solutions distinctes dans $]0, 2\pi[$ (*pensez "visuellement" en vous aidant d'un dessin et comptez le nombre de fois au moins où le support de Γ doit couper l'axe des ordonnées).*

Exercice 2.13 (**) : notion de simple connexité. Rappeler ce que signifie le fait qu'un ouvert de $\mathbb{C}$ soit simplement connexe. Montrer que l'union de deux ouverts simplement connexes d'intersection connexe non vide est simplement connexe. Si l'intersection n'est pas connexe ?

Exercice 2.14 (***) : le logarithme d'une fonction continue ne s'annulant pas dans un ouvert simplement connexe. Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une fonction g continue sur U telle que $f = \exp(g)$. Montrer de la même manière que toute fonction continue de $\overline{U}$ dans $\mathbb{C}^*$ s'écrit dans $\overline{U}$ comme l'exponentielle d'une fonction continue.
Indication : *on montrera d'abord que si a et z sont deux points de U, c un nombre complexe tel que $f(a) = e^c$, et $\gamma_{a,z} \ : t \in [0,1] \mapsto \gamma_{a,z}(t)$ un chemin continu arbitraire de U tel que $\gamma_{a,z}(0) = a$ et $\gamma_{a,z}(1) = z$, il existe une fonction $c_{\gamma_{a,z}}(t)$ telle que $c_{\gamma_{a,z}}(0) = c$ et $f(\gamma_{a,z}(t)) = \exp(c_{\gamma_{a,z}}(t))$ pour tout $t \in [0,1]$ (on dit aussi un "relèvement" de $\gamma_{a,z}$). On remarquera ensuite que $c_{\gamma_{a,z}}(1)$ ne dépend que de a, c, z, mais pas du choix de $\gamma_{a,z}$, avant de proposer un candidat pour $g(z)$.*

Exercice 2.15 (**) : indice et logarithme. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une application continue de U dans $\mathbb{C}^*$. On suppose que pour tout lacet continu γ de U, l'indice $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ (on dit encore le *degré* de $f \circ \gamma$ comme lacet de $\mathbb{C}^*$) est nul. Montrer qu'il existe une fonction g continue de U dans $\mathbb{C}$ telle que $f = \exp g$.

Exercice 2.16 (*) : indice, logarithme, racines n-ièmes. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$.

a) Montrer que si f admet un logarithme continu dans U, elle admet aussi, pour tout entier strictement positif n, une racine n-ième continue dans U.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et γ un lacet continu de U. Montrer que si f admet une racine n-ième continue dans U, l'indice $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ de $f \circ \gamma$ par rapport à l'origine est un multiple de n.

c) Montrer que si f est une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$ admettant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une racine n-ième continue, alors f admet aussi un logarithme continu dans U.

Exercice 2.17 (***) : indice et logarithme (suite).

a) Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, p un point de U, f une fonction continue dans $U \setminus \{p\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ et une fonction g continue dans $U \setminus \{p\}$ telles que $f(z) = (z-p)^k \exp((z))$ pour tout $z \in U \setminus \{p\}$.
Indication : *on notera γ le lacet $t \in [0,1] \longmapsto p + \epsilon e^{2i\pi t}$ avec ϵ suffisamment petit et on montrera que $k = \mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ convient.*

b) Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, p_1 et p_2 deux points distincts de U, f une fonction continue dans $U \setminus \{p_1, p_2\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}$ (que l'on définira comme des indices de lacets de $\mathbb{C}^*$ par rapport à l'origine) et une fonction g continue dans $U \setminus \{p_1, p_2\}$, à valeurs complexes, tels que $f(z) = (z-p_1)^{k_1}(z-p_2)^{k_2} \exp(g(z))$ pour tout $z \in U \setminus \{p_1, p_2\}$.

c) Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, $p_1, ..., p_N$ N points distincts de U, f une fonction continue dans $U \setminus \{p_1, ..., p_N\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe N entiers $k_1, ..., k_N$ dans $\mathbb{Z}$ (que l'on définira comme des indices de lacets de $\mathbb{C}^*$ par rapport à l'origine) et une fonction g continue dans $U \setminus \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, à valeurs complexes, tels que $f(z) = (z-p_1)^{k_1} \cdots (z-p_N)^{k_N} \exp(g(z))$ pour tout z dans l'ouvert $U \setminus \{p_1, ..., p_N\}$.

Exercice 2.18 (***) : indice et homotopie.

a) Soit f une application continue injective de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $s \in [0,1]$, on considère le lacet

$$t \in [0,1] \longmapsto f\Big(\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big) - f\Big(-s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big).$$

Montrer que tous les γ_s, $s \in [0,1]$, sont des lacets continus de support dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$ (voir l'exercice **2.7**). Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)$.

b) Pourquoi existe-t-il une fonction continue $c_1 \ : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour tout $t \in [0,1]$? Vérifier qu'il existe deux entiers k_1 et l_1 tels que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,1/2]\,,\ c_1(t+1/2) - c_1(t) &= (2k_1+1)i\pi \\ \forall\, t \in [1/2,1]\,,\ c_1(t-1/2) - c_1(t) &= (2l_1+1)i\pi. \end{aligned}$$

Indication : *on utilisera le fait que $\gamma_1(t+1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1/2]$ et que $\gamma_1(t-1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [1/2,1]$.*

c) En vérifiant, pour tout $t \in [0,1/2]$, que

$$c_1(t+1/2) = c_1(t+1/2) + 2(k_1+l_1+1)i\pi\,,$$

montrer que $k_1 \neq l_1$, puis que $\mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) = k_1 - l_1 \neq 0$. Déduire du **a)** que l'on a nécessairement $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) \neq 0$.

d) On suppose que $f(0)$ est un point frontière de $f(\overline{D(0,1)})$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de nombres complexes tendant vers $f(0)$ et tels que le lacet Γ_n : $t \in [0,1] \longmapsto f(e^{it}) - w_n$ ait son support dans $\mathbb{C}^*$ et soit d'indice nul par rapport à l'origine.

Indication : *on utilisera le fait qu'une fonction continue ne s'annulant pas dans $\overline{D(0,1)}$ s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction continue dans $\overline{D(0,1)}$, voir l'exercice 2.14.*

e) Montrer (en utilisant le théorème de Rouché) que $\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \deg \gamma_0$ pour n assez grand et conclure à une contradiction.

f) Montrer que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si f est une application injective continue de U dans $\mathbb{C}$, $f(U)$ est un ouvert.

Exercice 2.19 (*) : intégration des formes localement exactes sur un chemin continu. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma\ : [0,1] \to U$ un chemin continu de U et ω une 1-forme continue localement exacte au voisinage de U. Existe-t-il toujours un voisinage V du support de γ dans lequel ω soit exacte ? Sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 2.20 (**) : intégration sur un lacet des formes localement exactes et exactes. Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}(X)$ et γ un lacet continu de $\mathbb{C}$ dont le support évite tous les pôles de R dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R(z)\,dz$$

est un nombre complexe algébrique (*les nombres algébriques forment un sous-corps de* $\mathbb{C}$).

Indication : *on pensera à utiliser la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{C}(X)$.*

Exercice 2.21 (*) : formule de Cauchy. Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\,dz \qquad \int_\gamma \frac{e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}}{z^4} dz\,, \qquad \gamma\ : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}.$$

Exercice 2.22 (**) : la formule de Cauchy-Pompeïu. Soit φ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{C}$, nulle hors du disque $D(0,R_0)$ pour un certain $R_0 > 0$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{z-\zeta} = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(z+\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

où l'on a noté sous l'intégrale $\zeta = \xi + i\eta$.

Indication : *on appliquera la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) et l'on se souviendra que $(\xi,\eta) \mapsto 1/(\xi + i\eta) = 1/\zeta$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}^2$.*

b) Déduire de **a)** qu'il existe une fonction Φ de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ (que l'on explicitera) telle que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}}(z) = \varphi(z)\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Exercice 2.23 (***) : de la formule de Cauchy Pompeïu à l'identité de Bézout. Soient $p_1, ..., p_m$ m polynômes de n variables sans zéros communs dans $\mathbb{C}$, avec $d = \max(\deg p_j) > 0$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^m |p_j(\zeta)|^2} \Big) \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$

se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Calculer $Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1$.

b) Soit $R > 0$ et z un point du disque ouvert $D(0,R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) la fonction

$$\zeta \in D(0,R) \longmapsto (Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1)^2.$$

c) En fixant z et en faisant tendre R vers l'infini dans la formule établie au **b)**, construire m polynômes $q_1, ..., q_m$ à coefficients complexes tels que

$$1 = \sum_{j=1}^{m} p_j(z) q_j(z)\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Quelle autre méthode (algébrique cette fois) permet aussi de calculer de tels polynômes q_j ?

Chapitre 3

Holomorphie et propriétés afférentes

Ce chapitre est en correspondance avec la première partie du chapitre II ("*Fonctions holomorphes*") du cours (jusqu'à l'énoncé du théorème de Montel inclus). Les exercices proposés illustrent en particulier la notion d'holomorphie, la formule de Cauchy, le théorème de Morera, ainsi que le développement en série entière, le principe des zéros isolés, la méromorphie en un point, le théorème de Casaroti-Weierstrass, les principes du maximum (local et global), et enfin le théorème de Montel (déduit du théorème d'Ascoli).

Exercice 3.1 (*) : formule de Cauchy. Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_{|\zeta+i|=3} \sin\zeta\,\frac{d\zeta}{\zeta+i}\,,\ \int_{|\zeta|=4}\frac{\cos\zeta}{\zeta^2-\pi^2}\,,\ \int_{|\zeta|=2}\frac{d\zeta}{(\zeta-1)^n(\zeta-3)},$$

les chemins d'intégration mentionnés étant parcourus une seule fois dans le sens trigonométrique.

Exercice 3.2 (*) : holomorphie et formule de Cauchy. Soit f une fonction à valeurs complexes définie et continue dans la couronne fermée $\overline{C_{r,R}} := \{r \le |z| \le R\}$ du plan complexe (où $r < R$ sont deux nombres strictement positifs), holomorphe dans la couronne ouverte $C_{r,R} := \{r < |z| < R\}$. On note respectivement γ_r et γ_R les lacets $t \in [0,1] \mapsto re^{2i\pi t}$ et $t \in [0,1] \mapsto Re^{2i\pi t}$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\gamma_R}\frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta - \int_{\gamma_r}\frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big) \qquad \forall\, z \in C_{r,R}.$$

En déduire, pour tout $z \in C_{r,R}$, les formules de représentation "approchées" :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_R}\frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big) = -\frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_r}\frac{z^n f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big).$$

–

Exercice 3.3 (*) : holomorphie et formule de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une unique fonction F holomorphe dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, r > 0\,,\ F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad \forall\, z \in D(0,r)\,,$$

où $\gamma_r\ : t \in [0,1] \longmapsto re^{2i\pi t}$. Quelle est la fonction F lorsque $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 3.4 (**) : holomorphie et formule de Cauchy. Soit $I = [ia, ib]$ un intervalle fermé de l'axe imaginaire du plan complexe (avec $a < b$) et f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de I. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus I$, on pose

$$\Phi(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Montrer que la fonction Φ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus I$ et que, pour tout z dans I, on a

$$f(z) = \lim_{\substack{\zeta \to z \\ \mathrm{Re}\,\zeta < 0}} \Phi(\zeta) = \lim_{\substack{\zeta \to z \\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0}} \Phi(\zeta).$$

Exercice 3.5 (**) : développement en série entière d'une fonction holomorphe et formules de Cauchy pour les coefficients de Taylor. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,1)}$, injective sur ce disque fermé. Montrer que $f \circ \gamma\ : t \in [0,1] \longmapsto f(e^{2i\pi t})$ est un lacet continu simple et appliquer la formule de Green-Riemann pour montrer que la surface A_f du domaine enserré par le support de ce lacet vaut

$$A_f = \frac{1}{2i} \int_{f\circ\gamma} \overline{z} dz = \frac{1}{2i} \int_\gamma \overline{f(\zeta)}\, f'(\zeta)\, d\zeta \text{ avec } \gamma\ : t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi t}.$$

Si $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ est le développement de f au voisinage de 0, vérifier la relation

$$\sum_{n=1}^\infty n|a_n|^2 = \frac{A_f}{\pi} \leq (\sup_{|z|=1} |f(z)|)^2.$$

Exercice 3.6 (*) : nombres de Bernoulli. En faisant la division suivant les puissances croissantes de X par $\sum_{k\geq 1} X^k/k!$, on obtient

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} X^k\,,$$

où les B_k sont les *nombres de Bernouilli.* Quel est le rayon de convergence de la série entière $[(B_k/k!)z^k]_{k\geq 0}$?

Exercice 3.7 (**) : fonctions de Bessel. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une collection de nombres complexes $(J_n(z))_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que

$$\forall\, \zeta \in \mathbb{C}^*,\ \exp\Big[\frac{z}{2}\Big(\zeta - \frac{1}{\zeta}\Big)\Big] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)\zeta^n.$$

Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$J_n(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^n \sum_{k=\max(0,-n)} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}.$$

Montrer enfin que J_n est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, solution de l'équation différentielle de Bessel

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0.$$

Exprimer en fonction de J_1 la transformée de Fourier de la fonction caractéristique du disque unité.

Exercice 3.8 (*) : holomorphie et développement en série. Existe-t-il une fonction f holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ et telle que

$$f(1/n) = f(-1/n) = 1/(2n+1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$? Même question avec cette fois les contraintes

$$|f(1/n)| \leq 2^{-n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3.9 (*) : holomorphie et développement en série. Soit f une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ et telle que $f''(1/n) = f(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier.

Exercice 3.10 (*) : dérivée d'une fonction holomorphe. Soient $f_1, ..., f_m$ m fonctions holomorphes dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, telles que $\sum_{j=1}^n |f_j|^2$ soit une fonction constante dans U. Montrer qu'alors toutes les fonctions f_j, $j = 1, ..., m$, le sont aussi.

Exercice 3.11 (**) : série de Fourier d'une fonction holomorphe périodique. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(z+1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $\mathbb{C}^*$ telle que $f(z) = g(e^{2i\pi z})$. Montrer que l'on a, pour tout w dans $\mathbb{C}^*$,

$$g(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w^k\,,$$

avec

$$a_k = \int_0^1 f(t+ib) e^{-2i\pi k(t+ib)}\,dt \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 3.12 (***) : holomorphie et développement en série. Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ et R le maximum des modules de tous les pôles de F dans $\mathbb{C}$. Montrer que, pour $|z| > R$, la fonction F se développe dans la couronne $\{|z| > R\}$ sous la forme

$$F(z) = a_m z^m + \ldots + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{z^k}\,, \qquad (*)$$

où $m \in \mathbb{N}$, $a_m, ..., a_0 \in \mathbb{C}$ et la suite $(a_{-k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une certaine relation de récurrence linéaire. Réciproquement, si F est une fonction holomorphe dans une couronne $\{|z| > R\}$ se développant sous la forme $(*)$, où la suite $(a_{-k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ obéit à une relation de récurrence linéaire, peut-on affirmer que F est la restriction à la couronne $\{|z| > R\}$ d'une fraction rationnelle ?

Exercice 3.13 (**) : holomorphie et développement en série ; procédé sommatoire de Borel.

a) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans $D(0,R)$ $(R > 0)$. Montrer que l'on définit une fonction entière F en posant

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

et que, l'on a, pour tout $r \in]0, R[$, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(\zeta) e^{z/\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$

Vérifier aussi que pour tout $\rho \in]0, R[$, $|F(z)| = O(\exp(|z|/\rho)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$.

b) Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| = O(\exp(\kappa|z|))$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ (pour un certain $\kappa > 0$) et $b_n = F^{(n)}(0)/n!$ pour $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les inégalités de Cauchy, montrer que le rayon de convergence de la série $[n! b_n z^n]_{n \geq 0}$ est au moins égal à $1/\kappa$.

Exercice 3.14 (*) : singularités essentielles ou non. Quel est le type des singularités des fonctions suivantes

$$z \mapsto \frac{1}{z^2 - 1} \cos\Big(\frac{\pi z}{z+1}\Big)\,, \ z \mapsto \operatorname{cotan} z - \frac{1}{z}\,, \ z \mapsto z(e^{1/z} - 1)\,?$$

Exercice 3.15 (*) : singularités essentielles ou non.

a) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), telle que $|f(z)| \leq C|z|^{-1/2}$ lorsque $|z|$ tend vers 0. Montrer que la singularité de f en 0 est une singularité éliminable (c'est-à-dire que f peut se prolonger en une fonction holomorphe au voisinage de 0).

b) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée). Montrer que 0 est une singularité essentielle de f si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{r \to 0} [r^n (\sup_{|z|=r} |f(z)|)] = +\infty.$$

En déduire que si g est une fonction holomorphe au voisinage de 0, non identiquement nulle, et telle que $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ a une singularité essentielle en 0 dès que f en a une.

c) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), méromorphe à l'origine (c'est-à-dire présentant en 0 une singularité non essentielle, dite aussi pôle). Soit g une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ non polynomiale. Montrer que 0 est une singularité essentielle de $g \circ f$.

d) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), présentant une singularité essentielle en 0. Montrer que, si g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et non constante, $g \circ f$ présente une singularité essentielle en 0.

Exercice 3.16 (*) : inégalités de Cauchy et théorème de Liouville. Soient f et g deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ et telles que $|f(z)| \leq C|g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f = \lambda g$, où λ est un nombre complexe tel que $|\lambda| \leq C$. Que peut-on dire d'une fonction entière f telle que $|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z}$?

Exercice 3.17 (**) : inégalités de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe dans la couronne ouverte $C_{r,R} := \{z\,;\, r < |z| < R\}$, où $0 < r < R < +\infty$, telle que, $\forall\, z \in C_{r,R}$, $\operatorname{Re}(f(z)) \in [A, B]$. Montrer que, pour tout $\rho \in]r, R[$,

$$\sup_{|\zeta|=\rho} |f'(\zeta)| \leq \frac{e^{B-A}}{\min(\rho - r, R - \rho)}.$$

Indication : *on raisonnera avec* $g = \exp f$.

Exercice 3.18 (*) : principe du maximum.

a) Soit f une fonction continue dans un demi-plan fermé $\overline{\Pi}$, holomorphe dans le demi-plan ouvert Π. On suppose que $|f|$ est bornée par M sur la frontière de Π et que

$$\limsup_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Pi}} |f(z)| \leq M'.$$

Montrer que $|f|$ est bornée par $\sup(M, M')$ dans $\overline{\Pi}$.

b) En considérant la fonction $z \mapsto e^{\cos z}$, vérifier que le principe du maximum global dans $\overline{\Omega}$ peut fort bien être en défaut lorsque Ω est non borné.

Exercice 3.19 (*) : principe du maximum. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ présente un minimum en $z_0 \in \Omega$, que peut valoir ce minimum ?

Exercice 3.20 (*) : principe du maximum. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. On imagine le graphe de $(x, y) \mapsto |f(x+iy)|^2$ vu comme une “carte en relief” dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Quelle particularité (ou plutôt anomalie) présente cette carte en relief (si on la compare à une carte en relief classique d'un massif montagneux, telle une carte IGN) ?

Exercice 3.21 (*) : principe du maximum. Soit P un polynôme de degré d et a un nombre strictement positif. Montrer que l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |P(z)| < a\}$ ne saurait avoir plus de d composantes connexes.

Exercice 3.22 (*) : principe de l'application ouverte. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, φ une fonction de classe C^1 dans Ω, à valeurs réelles, telle que la courbe $S = \{\varphi = 0\}$ soit régulière (le gradient de φ ne s'annule pas sur cette courbe). Montrer que si f est une une fonction holomorphe dans U telle que $f(\Omega) \subset S$, alors nécessairement f est constante dans Ω.

Exercice 3.23 (**) : le théorème de Montel sans Ascoli. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ et $f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} z^k$ le développement en série entière de f_n au voisinage de l'origine. On suppose que les fonctions $|f_n|$ sont uniformément bornées par une constante M_K sur tout compact K inclus dans leur domaine de définition.

a) En utilisant les inégalités de Cauchy et le processus diagonal, montrer que l'on peut extraire de la suite des entiers positifs une sous suite strictement croissante $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n_l,k})_k$ converge vers un certain nombre complexe a_k.

b) En utilisant toujours les inégalités de Cauchy dans la majoration

$$|f_{n_l}(z) - f_{n_l}(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_{n_l,k} - a_{n_{l'},k}|\, |z|^k + 2 \sum_{k>N} \sup_n |a_{n,k}|\,,$$

montrer que, pour tout $z \in \overline{D(0,1)}$, la suite $(f_{n_l}(z))_{l\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Conclure à l'existence d'une fonction g continue sur $\overline{D(0,1)}$ telle que $\lim_{l\to+\infty} f_{n_l}(z) = g(z)$. Pourquoi g est-elle holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$?

c) Déduire des questions précédentes une démonstration du théorème de Paul Montel[1] qui ne fasse pas appel au théorème d'Ascoli.

Exercice 3.24 (**) : théorème de Montel. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille bornée de fonctions holomorphes dans U (il existe, pour chaque compact $K \subset\subset U$, une constante M_K telle que l'on ait pour tout $f \in \mathcal{F}$, pour tout $z \in K$, $|f(z)| \leq M_K$). Montrer que la famille $\mathcal{F}' := \{f' \,;\, f \in \mathcal{F}\}$ est aussi une famille bornée.
Si $\mathcal{F}'$ est une famille bornée, en est-il de même de $\mathcal{F}$?

Exercice 3.25 (*) : théorème de Montel. La topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ peut-elle être définie par une norme ?
Indication : *on pensera au théorème de F. Riesz caractérisant les espaces vectoriels normés de dimension finie en termes de relative compacité de la boule unité ouverte.*

Exercice 3.26 (*) : théorème de Montel. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions holomorphes de Ω dans lui-même. Pourquoi $\mathcal{F}$ est-elle une partie relativement compact de l'ensemble $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω, équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ? Quelle est l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$? Vérifier que $\mathcal{F}$ est un semi-groupe pour la composition des applications et que, si $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ et $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$ dans $\mathcal{F}$, alors $g \circ f = \lim_{n\to+\infty}(g_n \circ f_n)$ (toujours pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω).

Exercice 3.27 (*) Suites de fonctions holomorphes. Pour chacun des exemples suivants, montrer que l'on définit bien une fonction holomorphe dans l'ouvert indiqué entre parenthèses :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n!} \quad (\text{dans } \mathbb{C}) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z(z-n)} \quad (\text{dans } \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\, z^2} \quad (\text{dans } |\mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi[}\, z| < \pi/4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \sin(nz) \quad (\text{dans } |\mathrm{Im}\, z| < 1).$$

[1] Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, uniformément bornée en module sur tout compact de cet ouvert, alors on peut extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(f_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ qui soit uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction g holomorphe dans U.

Chapitre 4

Holomorphie et propriétés afférentes (2)

Les exercices de ce chapitre illustrent d'autres propriétés (ou concepts) attachées aux notions d'holomorphie et méromorphie, développées dans la seconde moitié du chapitre II (*Fonctions holomorphes*" du cours : le principe de réflexion et le lemme de Schwarz, le développement en série de Laurent, les notions de pôle et de résidu, le théorème des résidus, le comptage des zéros-pôles et le théorème de Rouché dans sa version non plus topologique mais cette fois analytique, le théorème de l'application ouverte, et enfin le théorème de Phragmen-Lindelöf.

Exercice 4.1 (*) : principe de réflexion de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Im}\, z > 0$, continue sur $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, réelle sur l'axe réel et telle que $|f(z)| = O(|z|^N)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini dans $\{\mathrm{Im}\, z \geq 0\}$. Montrer que f est une fonction polynômiale.

Exercice 4.2 (*) : principe de réflexion de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe dans le demi-disque ouvert $D^+ := D(0,1) \cap \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, continue sur $D^+ \cup]-1,1[$, nulle sur $]-1,1[$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 4.3 (**) : principe de réflexion de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, à valeurs dans le demi-plan $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, se prolongeant par continuité à un arc de cercle $]A,B[$ de la frontière de ce disque, avec $f(]A,B[) = I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe à l'union du disque ouvert $D(0,1)$ et du secteur angulaire ouvert d'ouverture $]A,B[$.

Exercice 4.4 (**) : principe de réflexion de Schwarz et théorème de l'application ouverte. Soit f une fonction continue de $[0,1]^2$ dans le disque fermé $\overline{D(0,1)}$, holomorphe dans $]0,1[^2$. On suppose f bijective entre $[0,1]^2$ et $\overline{D(0,1)}$.

a) Montrer que, si Γ désigne le lacet correspondant au bord de $[0,1]^2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, un paramétrage de $f \circ \Gamma$ est $t \mapsto e^{2i\pi t}$.

b) Montrer que f se prolonge en une fonction entière.

Exercice 4.5 (*) : lemme de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0,1)$ dans lui-même s'annulant à l'ordre $m \geq 1$ en $z = 0$. Montrer que $|f(z)| \leq |z|^m$ pour tout $z \in D(0,1)$ et que $|f^{(m)}(0)| \leq m!$. Que se passe-t-il lorsque l'une de ces inégalités devient une égalité ?

Exercice 4.6 (**) : le lemme de Schwarz comme il apparaît souvent en

théorie des nombres. Soit f une fonction entière, s'annulant à l'ordre au moins ν en tout point d'un sous-ensemble fini S inclus dans le disque unité fermé $\overline{D(0,r)}$. Montrer que, pour tout $R > r$, on a

$$\log \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \log \sup_{|z|=R} |f(z)| - \nu \,\mathrm{card(S)}\, \log \frac{R-r}{2r}.$$

Indication : *on pensera à factoriser dans le disque unité ouvert la fonction*

$$z \mapsto \frac{f(Rz)}{\sup_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|}$$

et à appliquer ensuite le lemme de Schwarz.

Exercice 4.7 (**) : lemme de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0,1)$ dans lui-même. Montrer que si z et w sont deux points de ce disque, on a

$$\Big|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\Big| \leq \Big|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\Big|.$$

Que peut-on dire s'il y a égalité pour deux points z et w distincts ?
Indication : *à partir de la fonction*

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(\zeta)},$$

on essaiera de construire une fonction holomorphe de $D(0,1)$ *dans lui-même s'annulant en* 0.

Exercice 4.8 (***) : lemme de Schwarz. Soit f une application holomorphe de $D(0,1)$ dans $D(0,1)$ s'annulant au points $z_1, ..., z_n$. Par récurrence sur n, montrer que $|f(0)| \leq |z_1 \dots z_n|$.

Exercice 4.9 (*) : calcul de résidus. Quels sont les pôles de la fonction

$$f_w \ : z \longmapsto \frac{\mathrm{cotan}\,(\pi z)}{z^2(z-w)} \ ?$$

Calculer les résidus en ces pôles de la forme différentielle $f_w(z)\,dz$.

Exercice 4.10 (*) : théorème des résidus. Soit $R = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, écrite ici sous forme réduite, telle que $\deg P \leq \deg Q - 2$, et n'ayant que des pôles simples. Montrer que

$$\sum_{Q(\alpha)=0} \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = 0.$$

Exercice 4.11 (*) : théorème des résidus. En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales semi-convergentes (les deux dernières sont dites *intégrales de Fresnel*) :

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\,, \qquad \int_0^\infty \sin t^2\,dt\,,\ \int_0^\infty \cos t^2\,dt.$$

Indication : *dans le premier cas, utiliser comme contour le segment* $[-R,R]$ *(en prenant soin dans un premier temps d'éviter l'origine), concaténé avec le demi-cercle*

$t \in [0,\pi] \mapsto Re^{2i\pi t}$ *; pour les deux autres intégrales, utiliser le bord du secteur conique* $\{re^{i\theta}\,;\, 0 \leq r \leq R\,;\, \theta \in [0,\pi/4]\}$.

Exercice 4.12 (*) : fonctions méromorphes et résidus (fonction Gamma). Pour tout $z \in \Pi^+ := \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, on pose

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

a) Montrer que Γ est holomorphe dans le demi-plan Π^+ et vérifie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dans ce demi-plan ouvert.

b) Montrer que Γ admet un prolongement à $\mathbb{C}$ tout entier en une fonction méromorphe dont les pôles sont $0, -1, -2, ...$ Calculer les résidus en tous ces pôles de la forme $\Gamma(z)\, dz$.

Exercice 4.13 (**) : fonctions méromorphes et résidus (fonction zéta de Riemann). Pour tout $z \in \Pi_1^+ := \{\mathrm{Re}\, z > 1\}$, on pose

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

a) Montrer que ζ est holomorphe dans le demi-plan Π_1^+.

b) Montrer que l'on a, pour tout $z \in \Pi_1^+$, la formule

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

c) Montrer que la fonction

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

est bien définie dans $\mathbb{C}$ tout entier et est une fonction entière.

d. Montrer[1] qu'il existe des nombres B_k, $k \geq 0$, tels que la série entière $[B_k z^k]_{k\geq 0}$ soit de rayon de convergence 2π et que, pour tout $z \in \Pi_1^+$, on ait

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{z+k-1}\,.$$

e) Déduire des questions précédentes que la fonction $\zeta\Gamma$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont on donnera la liste des pôles. Que valent les résidus en ces pôles de la forme $\zeta(z)\Gamma(z)\, dz$?

Exercice 4.14 (*) : décompte des zéros-pôles. Calculer le nombre de zéros du polynôme

$$P(z) = z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3$$

dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$. Même question pour le polynôme

$$P(z) = z^7 - 5z^3 + 6.$$

[1]Voir aussi l'exercice 3.6.

Exercice 4.15 (**) : théorème et formules de Rouché. Soit f une fonction continue dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$, telle que, pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, la fonction

$$f_w \ : z \longmapsto f(z,w)$$

soit holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$. On suppose aussi que f ne s'annule pas dans $\{|z|=1\} \times \overline{D(0,1)}$.

a) Montrer que pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, f_w n'a qu'un nombre fini de zéros (chacun compté avec sa multiplicité) dans $D(0,1)$ et que ce nombre ne dépend pas de w. On l'appelle dans la suite p.

b) On suppose aussi que, tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \mapsto f(z,w)$ est holomorphe dans $D(0,1)$. Montrer qu'il existe des fonctions $a_1, ..., a_p$ holomorphes dans $D(0,1)$, telles que dans $D(0,1) \times D(0,1)$,

$$f(z,w) = (z^p + a_1(w) z^{p-1} + \cdots + a_{p-1} z + a_p) g(z,w)\,,$$

où g est une fonction continue de $D(0,1) \times D(0,1)$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $w \in D(0,1)$, $z \mapsto g(z,w)$ soit une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ (et vice versa en échangeant z et w). Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ peuvent-ils être des points isolés ?

Indication : *on utilisera les relations de Newton reliant les sommes de Newton $S_1, ..., S_p$ de p nombres aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, ..., \sigma_p$ de ces mêmes p nombres.*

Exercice 4.16 (*) : formules de Rouché. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,3)}$, ne s'annulant pas sur la frontière de ce disque, et $\gamma \ : t \longmapsto 3e^{2i\pi t}$. On suppose

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2\,,\ \ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2\,,\ \ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = -4.$$

Que valent les zéros de f dans le disque $D(0,3)$?

Exercice 4.17 (**) : théorème de l'application ouverte. Soit f une application holomorphe d'un ouvert connexe U dans lui-même, telle que $f \circ f = f$. Montrer que soit f est constante, soit f est l'identité.

Exercice 4.18 (*) : théorème de l'application ouverte. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une application holomorphe non constante de U dans U telle que $f(U)$ soit un sous-ensemble relativement compact de U. On définit la suite $f^{(n)}$ en posant $f^{[n]} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois).

a) Montrer que tous les ensembles $f^{[n]}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, sont ouverts et que leur intersection K est compacte.

b) Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f^{[n]})_n$ une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction g et que $g(U) \subset K$.

c) Montrer qu'en fait $g(U) = K$. En conclure que la suite $(f^{[n]})_n$ converge uniformément sur tout compact vers un point d'attraction $z_0 \in U$.

Exercice 4.19 (**) : principe de Phragmen-Lindelöf. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq Ce^{B|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, C et B étant deux constantes positives. On suppose aussi qu'il existe un entier N tel que $F(t) = O(1+|t|)^N$

lorsque t tend vers $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante positive C' telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ |F(z)| \leq C'(1+|z|)^N e^{B|\mathrm{Im}\, z|}.$$

Exercice 4.20 (**) : principe de Phragmen-Lindelöf dans une bande. Soit f une fonction holomorphe bornée dans la bande ouverte $B := \{z\,;\, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, se prolongeant en une fonction continue à $\overline{B}$. Soit $A_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(iy)|$ et $A_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(1+iy)|$. On suppose $A_0A_1 > 0$.

a) Montrer que la fonction $G\ : z \in B \mapsto f(z)A_0^{z-1}A_1^{-z}$ est holomorphe dans B, se prolonge en une fonction continue dans $\overline{B}$, de prolongement borné en module par 1 sur la frontière de $\overline{B}$.

b) En utilisant le principe du maximum avec $z \mapsto G(z)e^{\epsilon z^2}$, où $\epsilon > 0$, puis en faisant tendre ϵ vers 0, montrer

$$\forall\, z \in B\,,\ |f(z)| \leq A_0^{1-\mathrm{Re}\, z} A_1^{\mathrm{Re}\, z}.$$

c) Que se passe-t'il si $A_0A_1 = 0$?

Exercice 4.21 (**) : principe de Phragmen-Lindelöf dans un secteur. Soit $\alpha \in]0,\pi[$ et C_α le secteur angulaire ouvert

$$C_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^*\,;\, |\mathrm{arg}_{]-\pi,\pi[}(z)| < \alpha\}.$$

a) Pour $\gamma \in]0,\infty[$, on définit la fonction $z \mapsto z^\gamma$ dans C_α par

$$z^\gamma := \exp(\gamma(\log|z| + i\mathrm{arg}_{]\pi,\pi[}(z))).$$

Montrer que cette fonction est holomorphe dans C_α et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{C_\alpha}$.

b) Soit f une fonction $\overline{C_\alpha} \to \mathbb{C}$, continue sur $\overline{C_\alpha}$, holomorphe sur C_α et telle que $\sup_{\partial C_\alpha} |f| = M < \infty$. On suppose aussi qu'il existe trois constantes $A > 0$, $B > 0$, $\rho \in]0,\pi/(2\alpha)[$ telles que

$$\forall\, z \in \overline{C_\alpha},\ |f(z)| \leq Ae^{B|z|^\rho}.$$

Soit $\gamma \in]\rho,\pi/(2\alpha)[$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{C_\alpha}}} |f(z)e^{-\epsilon z^\gamma}| = 0.$$

c) Montrer en utilisant convenablement le principe du maximum que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\forall\, z \in \overline{C_\alpha},\ |f(z)e^{-\epsilon z^\gamma}| \leq M.$$

En déduire que $|f|$ est bornée par $M = \sup_{\partial C_\alpha} |f|$ dans $\overline{C_\alpha}$.

Chapitre 5

Harmonicité

Cette section est en relatuion avec le chapitre III du cours ("*Fonctions Harmoniques*"). Les exercices proposés illustrent les notions d'harmonicité, de sous-haarmonicité, de super-harmonicité, leur caractérisation en termes de formules de la moyenne (resp. de la sous-moyenne ou sur-moyenne), les fonctions de Green et noyaux de Poisson, la formule de représentation de Green et l'intégrale de Poisson, enfin la notion de mesure harmonique.

Exercice 5.1 (*) : fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que, si $n \geq 3$, la fonction

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|^{2-n}$$

est harmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$.

b) Montrer que, si $x \mapsto f(x) = g(\|x\|)$ est une fonction de classe C^2 et radiale dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors

$$\Delta[f](x, y) = g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|).$$

Trouver toutes les fonctions harmoniques radiales dans $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$.

c) Vérifier que, si φ est une fonction de classe C^2 à support compact dans $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi(0) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(2-n)} \pi^{-n/2} \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \Delta[\varphi(x)] \, \|x\|^{2-n} \, dx_1 \dots dx_n.$$

Indication : *on pensera à la formule de Green-Ostrogradski ; on rappellera le calcul du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, puis celui de la surface de la sphère unité (dont on aura besoin ici).*

Exercice 5.2 (*) : de Green-Riemann à Green-Ostrogradski. Reprendre l'exercice 1.18.

Exercice 5.3 (**) : la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^n$. Soit U un voisinage du simplexe $\Delta_0 = \{t_1 + \dots + t_n \leq 1 \,;\, t_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$. Vérifier, pour un tel simplexe et toute $(n-1)$-forme ω de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Delta}_0$ que l'on a la formule

$$\int \dots \int_{\Delta_0} d\omega = \int \dots \int_{\partial \Delta_0} \omega$$

après avoir donné un sens au membre de droite. Pourquoi retrouve-t-on bien ici la *formule de la divergence* mentionnée en cours ? Comment établirait-t-on la même formule lorsque Δ_0 est remplacé par son image $\Phi(\Delta_0)$ par un difféomorphisme de classe C^2 ? Comment en déduirait-on la formule de la divergence pour un ouvert borné de frontière assez régulière ?

Exercice 5.4 (*) : harmonicité et propriétés de moyenne. Soit u une fonction de classe C^2 dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour toute boule fermée $\overline{B}$ incluse dans Ω, on ait

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}} \, d\sigma = 0\,,$$

où σ désigne la mesure surfacique sur le bord de $\overline{B}$. Montrer que u est harmonique dans Ω.

Exercice 5.5 (*) : harmonicité et formule de la moyenne (théorème de Kellog). Soit u une fonction continue réelle dans la boule fermée $\overline{B(0,R)}$ de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout x dans la boule ouverte $B(0,R)$, il existe $r(x) \in]0, d(x,\partial B)[$ tel que

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n (r(x))^{n-1}} \int_{\delta B(x,r(x))} u \, d\sigma_{B(x,r(x))},$$

où $\sigma_{B(x,r(x))}$ désigne la mesure surfacique sur le bord de $\overline{B(x,r(x))}$.

a) Comment s'exprime l'unique fonction v harmonique dans $B(0,R)$, continue dans $\overline{B(0,R)}$, et telle que $v = u$ sur le bord de $\overline{B(0,R)}$?

b) On note $w = u - v$ et $M := \max_{\overline{B(0,R)}} w$ et l'on suppose $M > 0$. On suppose que l'ensemble $E = \{w = M\} \cap B(0,R)$ est non vide. Montrer qu'il existe au moins un point x_0 de $B(0,R)$ tel que

$$d(x_0, \partial B(0,R)) = d(E, \partial B(0,R)) > 0.$$

c) Montrer que

$$\int_{\partial B(x_0, r(x_0))} (w(x_0) - w) \, d\sigma_{B(x_0,r(x_0))} = 0$$

et en conclure que $w \equiv M$ dans $B(x_0, r(x_0))$. Pourquoi ceci contredit-il l'hypothèse faite sur E (E non vide) ?

d) Déduire de la contradiction établie au **c)** que u est harmonique dans $B(0,R)$.

Exercice 5.6 : fonctions sous-harmoniques. Soit u une fonction continue et à valeurs réelles dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

a) Rappeler ce que signifie le fait que u est sous-harmonique dans Ω.

b) Montrer que u est sous-harmonique dans Ω si et seulement si, pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$, pour toute fonction h harmonique réelle sur Ω' et continue sur $\overline{\Omega}'$, on ait

$$\forall\, x \in \Omega',\ u(x) - h(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega'} (u(y) - h(y)).$$

c) Utiliser le critère établi au **(b)**[1] pour montrer que si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, alors $\log|f|$ est sous-harmonique dans Ω.

[1]Se servir aussi du fait que, si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, toute fonction harmonique réelle h dans U s'exprime dans U sous la forme $h = \operatorname{Re} f_U$, où f_U est holomorphe dans U, cf. Theorème III.4.1 du cours. Cette question propose une autre démonstration de la Proposition III.4.4 du cours.

Exercice 5.7 : sous-harmonicité. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. et u une fonction localement intégrale dans Ω, à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $r \in]0, d(x, \partial\Omega)[$,

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u d\sigma_{B(x,r)}.$$

La fonction u est-elle sous-harmonique dans Ω ? Pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$u^*(x) = \limsup_{y \to x} (u(y)) .$$

Même question que précédemment pour cette fois la fonction u^*.

Exercice 5.8 : formule de représentation ($n = 2$). Soit Ω ou ouvert borné du plan de frontière C^1, u une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Omega}$, de classe C^2 et harmonique dans Ω. Vérifier la formule de représentation :

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(\zeta) \log|\zeta - z|\, d\sigma(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_{\text{ext}}} \Big[\log|\zeta - z| \Big] \, d\sigma(\zeta) \,,$$

où $d\sigma$ représente la mesure lineique sur le bord de $\partial\Omega$. Que devient cette formule de représentation en dimension n ? Que devient cette formule de représentation lorsque u est de classe C^2 dans Ω, mais n'est plus supposée harmonique ?

Exercice 5.9 : principe de réflexion pour les fonctions harmoniques. Soit u une fonction harmonique dans $]a, b[+i]0, \delta[$, se prolongeant à $]a, b[+i[0, \delta[$ de manière continue, nulle sur le segment réel $]a, b[$. Montrer que la fonction définie dans l'ouvert $]a, b[+i]{-\delta}, \delta[$ par $v(z) = u(z)$ si $\operatorname{Im} z \geq 0$ et $v(z) = -v(\overline{z})$ si $\operatorname{Im} z \leq 0$ est harmonique dans $]a, b[\times i] - \delta, \delta[$.

Exercice 5.10 : mesure harmonique. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière C^1. On suppose qu'étant donnée une fonction continue quelconque $\varphi\ : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$, il existe une fonction $P[\varphi]$ continue sur $\overline{\Omega}$, harmonique dans Ω et égale à φ sur $\partial\Omega$.

a) Montrer qu'une telle fonction $P[\varphi]$ est unique et exprimer là en termes de la fonction de Green G_Ω de l'ouvert Ω (on admet l'existence d'une telle fonction de Green).

b) Montrer que l'espace des fonctions continues de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$ est un espace de Banach E pour la norme uniforme, qu'il en est de même pour l'espace des fonctions continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ (aussi pour la norme uniforme) et que $\varphi \mapsto P[\varphi]$ est une isométrie de E dans F. En déduire que, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, l'application

$$\varphi \in E \mapsto P[\varphi](x)$$

est une forme linéaire L_x continue positive sur E, i.e une forme linéaire continue L_x telle que $L_x(\varphi) \geq 0$ si $\varphi \geq 0$. Peut-on donner un sens à $L_x(\chi_A)$ si A est un sous-ensemble mesurable de $\partial\Omega$? Si oui, pourquoi définit-on ainsi une mesure positive [2] L_x sur le bord de Ω ?

[2] Cette mesure positive μ_x, qui est d'ailleurs une mesure de probabilité, a aussi une interprétation en physique, en relation avec le *mouvement brownien* dans le plan (cf. par exemple `wikipedia` pour une définition de ce processus aléatoire) : si A est un sous-ensemble mesurable de $\partial\Omega$, $\mu_x(A)$ représente la probabilité pour qu'une particule issue de x à l'instant $t = 0$ et assujettie précisément au *mouvement brownien* dans le plan s'échappe pour la première fois de l'ouvert Ω au travers d'un point de A.

Exercice 5.11. On suppose que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'ouvert $\Omega = D(0,1) \setminus \{0\}$ du plan complexe, ce qui implique[3] que l'on puisse construire une fonction de Green G_Ω, s'écrivant donc sous la forme

$$G_\Omega(w,z) = \frac{\log|z-w|}{2\pi} + h_w(z)\,,$$

où h_w est de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, de classe C^2 et harmonique dans Ω. Pourquoi la fonction harmonique $z \mapsto h_w(z)$ a t-elle une singularité éliminable en $z = 0$? Montrer que la fonction G définie par $G(z) = G_\Omega(w,z)$ est sous-harmonique dans $D(0,1)$ et conclure à une contradiction avec le principe du maximum. En déduire que Ω ne saurait posséder de fonction de Green. Le même résultat se transpose-t'il à la dimension n ?

Exercice 5.12 (*) : harmonicité et propriétés de moyenne. Soit u une fonction harmonique dans une couronne ouverte $\{R_1 < |z| < R_2\}$. On pose, pour tout $r > 0$,

$$f(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Montrer que $f(r) = a\log r + b$, où a et b sont deux constantes. Montrer que si P est un polynôme de Laurent, i.e. $P(z) = \sum_{-N}^{N} a_k z^k$, il existe une subdivision $R_0 = 0 < R_1 < \ldots < R_{m-1} < R_m = +\infty$ de $]0,\infty[$ telle que la fonction

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(re^{i\theta}|\,d\theta$$

soit une fonction affine de $\log r$ sur chaque intervalle ouvert $]R_k, R_{k+1}[$.

Exercice 5.13 (*) : harmonicité et holomorphie. Montrer que toute fonction réelle harmonique dans $\mathbb{C}$ et bornée supérieurement est constante.

Exercice 5.14 (**) : formule de représentation de Poisson.
a) Vérifier, pour $\zeta \in \{|\zeta| = 1\}$ et $z \in D(0,1)$, la relation

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right).$$

En déduire que si u est une fonction harmonique réelle dans $D(0,1)$ et continue dans $\overline{D(0,1)}$, l'unique fonction h (on dira au passage pourquoi elle est unique) holomorphe dans $D(0,1)$, telle que $\mathrm{Im}\,h(0) = 0$ et que $\mathrm{Re}\,h = u$ dans $D(0,1)$, est donnée par

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

b) Soit f une fonction holomorphe dans $D(0,1)$, nulle en 0, et telle que $|\mathrm{Re}\,f| \le A$ dans $D(0,1)$. Montrer que, si $0 < r < 1$, on a, pour tout $z \in D(0,r)$,

$$|\mathrm{Im}\,f(z)| \le \frac{2A}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}.$$

---
[3]Voir la construction de la fonction de Green $(x,y) \mapsto G_\Omega(x,y)$ dans la section III.3 du cours (page 30), ainsi que son expression à partir du potentiel Γ.

Exercice 5.15 (**) : inégalité de Harnack. Soit u une fonction continue positive dans $\overline{D(z_0,R)}$, harmonique dans $D(z_0,R)$.
a) Établir, pour tout $z \in D(z_0,R)$, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, l'inégalité :

$$\frac{R-|z-z_0|}{R+|z-z_0|} \leq \frac{R^2-|z-z_0|^2}{|z_0+Re^{i\theta}-z|^2} \leq \frac{R+|z-z_0|}{R-|z-z_0|}.$$

b) En déduire que si u est une fonction continue positive dans $\overline{D(z_0,R)}$, harmonique dans $D(z_0,R)$, on a l'*inégalité de Harnack* :

$$\frac{R-|z-z_0|}{R+|z-z_0|}u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R+|z-z_0|}{R-|z-z_0|}u(z_0) \qquad \forall\, z \in D(z_0,R).$$

c) En utilisant l'inégalité établie au **a)** (on pourra se ramener au cas des fonctions harmoniques positives réelles), montrer que si u est une fonction harmonique de $\mathbb{C}$ dans lui-même, bornée en module, alors u est constante (comparer avec le résultat établi dans l'exercice **5.13**).

Exercice 5.16 (**) : intégrale de Poisson. Pour tout $z \in D(0,1)$, on définit une fonction $\varphi_z\ : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ comme suit (faire un petit dessin) : le point $e^{i\varphi_z(\theta)}$ est l'intersection du cercle unité et de la demi-droite issue de z et dirigée par $e^{i\theta}$, avec la convention $0 \leq \varphi_z(\theta) - \theta < 2\pi$.
a) Montrer que φ_z est différentiable et que

$$\varphi_z'(\theta) = \Big|\frac{e^{i\varphi_z(\theta)}-z}{e^{i\theta}-z}\Big|.$$

b) Montrer que, si u est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, alors, si $P(u)$ désigne l'intégrale de Poisson de u,

$$P(u)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi_z(\theta)})\,d\theta.$$

Exercice 5.17 (**) : formule de Poisson, fonctions sous-harmoniques. Soit u une fonction continue, positive dans $\overline{B(0,R)}$ et sous-harmonique dans $B(0,R)$. Soit $z_0 \in B(0,R)$ et C un cercle de centre z_0 inclus dans $D(0,R)$.
a) Soit v la fonction harmonique dans $D(0,R)$ égale à u sur le bord de ce disque. Comparer

$$\int_C u(z)d\sigma_C$$

et $v(z_0)$ ($d\sigma_C$ désigne la mesure de Lebesgue sur le cercle C).
b) Utiliser la formule de Poisson pour établir :

$$\int_C u(z)d\sigma_C \leq \Big(1+\frac{|z_0|}{R}\Big)\int_{\partial C(0,R)} d\sigma_{\partial D(0,R)}.$$

Exercice 5.18 (*) : sous harmonicité de $|f|^p$ pour f holomorphe et $p>0$. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$. Montrer, pour tout $p>0$, l'*inégalité de Hardy* :

$$\frac{1}{\pi}\int_{D(0,1)} |f|^p\,d\lambda \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p\,d\theta\,.$$

Exercice 5.19 (**) : sous-harmonicité et convexité. Soit u une fonction continue dans la couronne ouverte $C_{R_1,R_2} := \{0 \leq R_1 < |z| < R_2 \leq \infty\}$. Montrer que la fonction

$$r \mapsto \log \lambda(u, 0, r) := \log \Big[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta \Big]$$

est une fonction convexe de $\log r$ dans $]R_1, R_2[$ si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, $r \mapsto r^\alpha \lambda(u, 0, r)$ est une fonction convexe de $\log r$. Si l'on suppose en plus $\log u$ sous-harmonique dans la couronne, montrer qu'il en est de même pour

$$z \mapsto \log(u(z)) + \alpha \log |z| \text{ et } z \mapsto |z|^\alpha u(z)$$

pour tout $\alpha > 0$. Calculer $\lambda(|z|^\alpha u, 0, r)$ en fonction de $\lambda(u, 0, r)$ si $r \in]R_1, R_2[$. Montrer enfin que si u est une fonction positive dans la couronne C_{R_1,R_2} et telle que $\log u$ soit sous-harmonique dans cette même couronne, alors $r \mapsto \log(\lambda(u, 0, r))$ est une fonction convexe de $\log r$ dans $]R_1, R_2[$.

Exercice 5.20 (inégalité de Carathéodory). Soit g une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0, R)}$, avec $g = P + iQ$ (P et Q à valeurs réelles) dans ce disque ; montrer que, pour tout $z \in D(0, R)$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} + z)}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(Re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} + z)}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iQ(0) \\ &= g(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{i\theta}) \frac{z}{Re^{i\theta} - z} d\theta\,. \end{aligned}$$

En déduire que, si l'on note $A_g(R) := \sup\{P(z)\,;\, |z| = R\}$, on a

$$|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{2r}{R - r}(A_g(R) - P(0))\,, \quad \forall z,\ |z| \leq r < R$$

(*on appliquera la formule précédente à* $A_g(R) - g$). Montrer que, si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0, R)}$, ne s'annulant pas dans $D(0, R)$ avec $f(0) = 1$, alors, pour tout $r \in]0, R[$,

$$|f(z)| \geq (M_f(0; R))^{-\frac{2r}{R - r}} \qquad \forall z\,, \quad |z| \leq r\,,$$

si

$$M_f(0; R) := \sup_{[0,2\pi]} |f(Re^{i\theta})|.$$

Chapitre 6

Le théorème de Runge

Cette série d'exercices illustre la section 1 du chapitre IV du cours ("*Approximation des fonctions holomorphes et équation* $\partial u/\partial \overline{z} = f$") dévolue aux diverses versions du théorème de Runge.

Exercice 6.1 (*) : théorème de Runge. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ dont le complémentaire n'a pas de composante connexe bornée. Montrer que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions holomorphes sur Ω (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).

Exercice 6.2 (**) : théorème de Runge. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $A = \{a_k\}$ une collection de points dans $\mathbb{C}$, la règle étant qu'il existe un et un seul point de A dans chaque composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Montrer que toute fonction holomorphe au voisinage de K s'approche uniformément sur K par des fractions rationnelles à pôles dans A.

Exercice 6.3 (*) : enveloppe d'holomorphie. Donner un exemple d'un compact K et de deux ouverts Ω_1 et Ω_2 contenant tous les deux K et tels que les enveloppes d'holomorphie $\widehat{K}_{\Omega_1}$ et $\widehat{K}_{\Omega_2}$ diffèrent.

Exercice 6.4 (**) : théorème de Runge (mais aussi formule de Cauchy). Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe au voisinage de K. En utilisant le théorème de Runge, montrer que f s'approche uniformément sur K par des fractions rationnelles à pôles simples, tous dans $\mathbb{C} \setminus K$. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Cauchy : montrer pour cela qu'étant donné un ouvert Ω contenant K, il existe un nombre fini N de courbes de Jordan (polygonales) de support dans Ω telles que K soit dans l'union des ouverts qu'elles enserrent.

Exercice 6.5 (*) : élémentaire. Montrer élémentairement que la fonction $z \mapsto 1/z$ ne peut être limite uniforme de polynômes dans l'anneau $\{1 \leq |z| \leq 2\}$. Cela est-il bien en concordance avec le théorème de Runge ?

Exercice 6.6 (***) : Autour du théorème de Runge.

(a). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < b_n < a_n < n$. Montrer qu'il existe un polynôme p_n tel que $|p_n(z)| \geq n$ si $\operatorname{Im} z = b_n$ et $z \in \overline{B(0,n)}$, et $|p_n(z)| \leq 1/n$ pour $z \in \overline{B(0,n)}$ et soit $\operatorname{Im} z \leq 0$, soit $\operatorname{Im} z \geq a_n$.

(b) Déduire du **(a)** l'existence d'une suite de polynômes $(p_n)_n$ convergeant simplement vers la fonction nulle, la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, mais non uniforme au voisinage d'aucun point de l'axe réel.

(c) Construire une suite de polynômes convergeant simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ et vers 1 sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 6.7 (**) : Runge et dualité. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ de mesure nulle. Montrer que les fractions rationnelles à pôles hors de K sont denses dans $C(K)$.

Exercice 6.8 (**) : Runge et dualité. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe et K de mesure nulle. Montrer que les fonctions polynômiales sont denses dans $C(K)$. Que retrouve-t-on si K est un intervalle de $\mathbb{R}$?

Exercice 6.9 (**) : Runge et enveloppe d'holomorphie. Prouver que les items suivants sont équivalents, étant donnés deux ouverts $\Omega_1 \subset \Omega_2$ de $\mathbb{C}$.

- Toute fonction holomorphe dans Ω_1 est limite uniforme sur tout compact d'une suite de restrictions à Ω_1 de fonctions holomorphes sur Ω_2.
- Si $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = K \cup F$ avec K compact, F fermé dans Ω_2 et $K \cap F = \emptyset$, alors $K = \emptyset$.
- Pour tout compact K de Ω_1, $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$.
- Pour tout compact K de Ω_1, $\widehat{K}_{\Omega_1} = \Omega_1 \cap \widehat{K}_{\Omega_2}$.
- Pour tout compact K de Ω_1, $\Omega_1 \cap \widehat{K}_{\Omega_2}$ est aussi un compact de Ω_1.

Chapitre 7

Résolution du $\overline{\partial}$ et produits infinis

La série d'exercices proposée ici illustre les sections 2 et 3 du chapitre IV du cours ("*Approximation des fonctions holomorphes et équation* $\partial u/\partial\overline{z} = f$"), plus particulièrement la résolution du $\overline{\partial}$ et le maniement des produits infinis (au travers du théorème de Weierstrass).

Exercice 7.1 (**) : Résolution de $\overline{\partial} u = f$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphes dans le disque unité ouvert $D(0,1)$ du plan complexe, sans zéro commun dans ce disque.
(a) Construire deux fonctions g_1 et g_2 de classe C^∞ dans $D(0,1)$ telles que $1 \equiv f_1 g_1 + f_2 g_2$ dans $D(0,1)$.
(b) Déterminer tous les couples de fonctions (v_1, v_2) de classe C^∞ dans $D(0,1)$ tels que l'on ait l'identité $f_1 v_1 + f_2 v_2 \equiv 0$ dans $D(0,1)$.
(c) En utilisant la surjectivité de l'opérateur de Cauchy-Riemann de $C^\infty(D(0,1))$ dans lui-même, montrer qu'en « corrigeant » judicieusement le couple (f_1, f_2) construit au **(a)**, on peut trouver deux fonctions h_1 et h_2 holomorphes dans $D(0,1)$ telles que $f_1 h_1 + f_2 h_2 \equiv 1$ dans $D(0,1)$.

Exercice 7.2 (*) : produits infinis. Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers : $2, 3, 5, \ldots.$
(a) Prouver, pour tout nombre complexe z de partie réelle strictement supérieure à 1, la convergence du produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^z}}.$$

Pourquoi ce produit définit-il une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 1\}$?
(b) Vérifier, pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > 1$, l'*identité d'Euler* :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^z}}.$$

Exercice 7.3 (*) : produits infinis. Prouver la convergence, pour tout $z \in D(0,1)$, du produit infini

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}).$$

Pourquoi ce produit infini définit-il une fonction holomorphe dans le disque unité ?

Vérifier la formule

$$\forall\, z \in D(0,1)\,,\ \frac{1}{1-z} = \prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n}).$$

Exercice 7.4 (**) : produits infinis, facteurs de Weierstrass.
(a) Montrer que l'on définit bien une fonction entière en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)\,.$$

Calculer la fonction méromorphe F'/F (sous forme d'un développement en série de fonctions méromorphes uniformément convergent sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^*$).
(b) Si N est un entier strictement positif et z un nombre complexe de module strictement inférieur à $N+1/2$, calculer grâce à la formule des résidus

$$I_N(z) := \int_{\gamma_{N+1/2}} \frac{\operatorname{cotan}\pi\zeta}{\zeta(\zeta-z)}\,d\zeta$$

si $\gamma_{N+1/2}\ : t\in[0,1]\mapsto (N+1/2)e^{2i\pi t}$.
(c) Quelle est la limite de $I_N(z)$ lorsque N tend vers $+\infty$? En déduire la formule

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big).$$

(d) En utilisant convenablement la formule trigonométrique de duplication pour le sinus, montrer que l'on a aussi l'autre factorisation

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{\pi z}{2^n}\Big)\,.$$

Exercice 7.5 (**) : produits infinis, facteurs de Weierstrass.
(a) Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction méromorphe

$$f_n(z) := \frac{n}{n+z}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^z\,.$$

Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

est uniformément convergent sur tout compact de $U := \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,...\}$ et définit une fonction Φ méromorphe dans $\mathbb{C}$, à pôles les entiers strictement négatifs.
(b) Montrer que, pour tout z tel que $z-1\in U$,

$$\Phi(z-1) = \lim_{N\to+\infty}\frac{N!\,N^z}{z(z+1)\cdots(z+N)}\,.$$

(c) Vérifier, pour tout z de partie réelle strictement positive, la formule

$$\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt = \lim_{N\to+\infty}\frac{N!\,N^z}{z(z+1)\dots(z+N)}$$

(*utiliser pour cela le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que* e^{-t} *est, pour tout* $t>0$*, la limite lorsque* N *tend vers* $+\infty$ *de* $(1-t/N)^N\chi_{[0,N]}(t)$).

(d) Montrer que la fonction

$$z\in\{\mathrm{Re}\,z>0\}\mapsto\Gamma(z)\ :=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

se prolonge en une fonction méromorphe à tout le plan complexe et que ce prolongement coincide avec la fonction $z\mapsto\Phi(z-1)$.

(e) En déduire que Γ ne s'annule pas dans $\{\mathrm{Re}\,z>0\}$, que $z\mapsto 1/\Gamma(z)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction entière F, et que l'on a

$$F(z)=ze^{\gamma z}\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}\,,$$

où

$$\gamma:=\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^N\frac{1}{k}-\log N\Big)\tag{7.1}$$

désigne la *constante d'Euler* (on montrera l'existence de la limite (7.1)).

(f) En utilisant le théorème de convergence dominée et le développement

$$\frac{1}{1-e^{-t}}=\sum_{k=0}^\infty e^{-kt}\quad\forall\,t\in]0,\infty[,$$

démontrer[1], pour tout z tel que $\mathrm{Re}\,z>1$, l'identité

$$\Gamma(z)\times\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^z}=\int_0^\infty\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt.$$

(g) Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, la fonction $t\in[1,\infty[\mapsto t^{z-1}/(e^t-1)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[1,\infty[$ et que la fonction

$$E\ :z\in\mathbb{C}\mapsto\int_1^\infty\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$$

est une fonction entière (on utilisera les théorèmes de Morera et de Fubini).

(h) Si les B_k, $k\in\mathbb{N}$, désignent les coefficients de Taylor du développement au voisinage de l'origine de

$$z\mapsto\frac{z}{e^z-1}=\sum_{k=0}^\infty B_kz^k$$

(voir l'exercice 3.6), montrer que l'on définit une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, de pôles $0,-1,-2,...$ en posant

$$M(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{B_k}{z+k-1}\quad z\neq 0,-1,-2,...$$

Vérifier que l'on a, pour tout z tel que $\mathrm{Re}\,z>1$,

$$M(z)=\int_0^1\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt=\int_0^1 t^{z-2}\frac{t}{e^t-1}\,dt.$$

[1]Voir aussi l'exercice 4.13.

(i) Déduire en utilisant les résultats établis aux questions **(e)** à **(h)** que la fonction ζ définie dans $\{z\,;\ \mathrm{Re}\, z > 1\}$ par

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe et de la forme

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + H(z),$$

où $H(z)$ est une fonction entière.

Exercice 7.6 (*) : théorème de Weierstrass dans $\mathbb{C}^*$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction entière F telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ F(z+1) = F(z)$$

et qui s'annule en tous les zéros de $z \mapsto e^z - 1$.

(b) Montrer en revanche que si P est un polynôme à coefficients complexes, de zéros $\alpha_1, ..., \alpha_d$, supposés tous simples, la seule fonction entière F telle que $P(d/dz)[F] \equiv 0$ et $F(\overline{\alpha_j}) = 0$, $j = 1, ..., d$, est la fonction identiquement nulle [2].

[2] L'opérateur $H(D)$ associé à la fonction entière $H\,:\ z \mapsto e^z - 1$ comme $P(D)$ l'est au polynôme P est l'opérateur qui à une fonction entière F associe $F(z+1) - F(z)$, d'où le lien entre les deux questions **(a)** et **(b)** de l'exercice.

Chapitre 8

Applications conformes, sphère de Riemann

Ce chapitre propose une batterie d'exercices en relation avec le chapitre V du cours ("*Transformations holomorphes, Théorème de Riemann*"). Il est centré autour de la notion géométrique de conformité et une familiarisation avec la sphère de Riemann (algébriquement la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).

Exercice 8.1 (*) : applications conformes. Montrer que l'application

$$z \mapsto \log |z| + i\mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi[}(z)$$

réalise une application conforme entre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $\{|\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$.

Exercice 8.2 (*) : applications conformes. Quelle est l'image de la bande

$$\{0 < \mathrm{Re}\, z < \pi\}$$

par l'application $z \mapsto \cos z$? Décrire l'image des droites verticales et des segments horizontaux par cette application.

Exercice 8.3 (***) : applications conformes. Construire (en utilisant des homographies convenables) une application conforme entre le disque unité $D(0,1)$ et l'ouvert U défini comme l'intersection de ce disque avec le disque ouvert $D(1,1)$. Plus généralement, construire une application conforme entre le disque unité et la *lunule* définie comme intersection de deux disques ouverts du plan complexe dont les frontières se coupent en deux points distincts d'affixes a et b.

Exercice 8.4 (**) : applications conformes, théorème de Riemann. Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini comme $]0,1[^2$ auquel on a retiré tous les segments

$$[(1/n,0),(1/n,1/2)],\ n = 2,3,...$$

Montrer que U est conformément équivalent au disque unité ouvert $D(0,1)$, mais qu'il ne saurait y avoir d'application conforme entre $D(0,1)$ et U se prolongeant en une bijection continue entre $\overline{D}(0,1)$ et $\overline{U}$.

Exercice 8.5 (*) : homographies. Montrer que la *fonction de Kœbe*

$$K\ : z \in D(0,1) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

s'exprime en fonction de l'*homographie de Cayley* :

$$z \in D(0,1) \mapsto \frac{z+1}{1-z}$$

sous la forme

$$\forall\, z \in D(0,1)\,,\ K(z) = \frac{z(C(z)+1)^2}{4}\,,$$

et qu'elle réalise une transformation conforme entre $D(0,1)$ et $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1/4]$.

Exercice 8.6 (**) : applications conformes, théorème $1/4$ de Kœbe.
(a) Soit f une fonction holomorphe injective dans $D(0,1)$, telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$. Montrer qu'il existe une série entière $[b_n X^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence au moins égal à 1, telle que

$$\forall\, z \in D(0,1)\setminus\{0\}\,,\ \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

(b) Si le développement de f en série entière dans $D(0,1)$ est $f(z) = z + \sum_{k\geq 2} a_k z^k$, montrer que

$$\forall\, z\,,\ |z|>1\,,\ a_2 + \frac{1}{f(1/z)} = z + \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{z^k}.$$

(c) Déduire du fait que $z \mapsto 1/f(1/z)$ est injective dans $\{|z|>1\}$ que

$$\sum_{k\geq 1} k|b_k|^2 \leq 1$$

et en déduire $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ (*on s'inspirera de la méthode utilisée dans l'exercice* **3.5**).
(d) Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $D(0,1)$, injective, telle que $g(0)=0$, $g'(0)=1$, et $(g(z))^2 = f(z^2)$ pour tout $z \in D(0,1)$. En appliquant à g le résultat établi aux trois questions précédentes, montrer que $|f''(0)| \leq 4$. Il s'agit là du premier cran de la *conjecture de Bieberbach* (1916), prouvée par Louis de Branges en seulement 1985.
(e) En appliquant le résultat établi au **(d)** à la fonction

$$\zeta \in D(0,1) \mapsto \frac{zf(\zeta)}{z - f(\zeta)}$$

lorsque $z \notin f(D(0,1))$, montrer que nécessairement $|z| \geq 1/4$. En déduire que l'image par f du disque $D(0,1)$ contient nécessairement le disque ouvert $D(0,1/4)$. Ce résultat important est connu comme le *théorème un-quart de Kœbe.*

Exercice 8.7 (**) : la sphère de Riemann. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1|<1$ et $|z_2|<1$. On définit la *distance cordale* entre z_1 et z_2 comme la distance de leurs antécédents sur la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$ *via* la projection stéréographique depuis le pôle Nord. Montrer que cette distance est égale à

$$d_{\text{cord}}(z_1,z_2) = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}.$$

Exercice 8.8 (**) : la sphère de Riemann. Soit ω une 1-forme méromorphe sur la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$, i.e. une 1-forme que l'on peut écrire en coordonnées

locales au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{S}^2$ sous la forme $f(\zeta)\,d\zeta$, où f est une fonction méromophe au voisinage de l'origine (correspondant à z_0).
(a) Montrer que le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f ne dépend que de la forme ω et non de la représentation $f(\zeta)\,d\zeta$. En est-il de même pour les autres coefficients a_k ? On note $a_{-1}(z_0) := \mathrm{Res}_{z_0}(\omega)$.
(b) Montrer que si ω est une forme méromorphe dans $\mathbb{S}^2$, alors il n'y a qu'un nombre fini de points où $\mathrm{Res}_{z_0}(\omega) \neq 0$ et que la somme des nombres $\mathrm{Res}_{z_0}(\omega)$, $z_0 \in \mathbb{S}^2$, est égale à 0.

Exercice 8.9 (*) : transformation de Mœbius.
(a) Montrer que si f est une transformation de Mœbius du disque unité dans lui-même, on a

$$\frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2}\,,$$

ce que l'on exprime en disant que les transformations de Mœbius préservent la *métrique hyperbolique* sur le disque unité.
(b) Montrer que si f est une application holomorphe d'un ouvert U de $D(0,1)$, à valeurs dans $D(0,1)$, et telle que

$$\frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2} \quad \forall\,\zeta \in U\,,$$

alors f est une transformation de Mœbius (*on composera f avec une transformation de Mœbius adéquate de manière à se ramener à supposer de plus $0 \in U$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, et l'on montrera qu'alors $f^{(k)}(0)=0$ pour tout $k \geq 2$*).

Chapitre 9

Autour des théorèmes de Picard

Cette (trop) courte série d'exercices illustre le chapitre VI du cours ("*Prolongement analytique*"). Elle est essentiellement autour du théorème de Bloch et du petit théorème de Picard. Elle sera complétée ultérieurement par des exercices autour du groupe modulaire[1].

Exercice 9.1 (**) : théorème de Kœbe (cf. exercice 8.6) revisité. Soit f une fonction holomorphe bornée du disque unité dans $\mathbb{C}$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On pose $M = \|f\|_\infty$.
a) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus f(D(0,1))$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction h holomorphe dans $D(0,1)$ telle que $h^2(z) = 1 - f(z)/w$ pour tout z dans $D(0,1)$ et $h(0) = 1$. Donner les premiers termes du développement de h en série entière.
b) Montrer que

$$\|h\|_\infty^2 \leq 1 + \frac{M}{|w|}$$

et déduire du **a)** et de la formule de PLancherel que $|w| \geq 1/(4M)$. Conclure que $f(D(0,1))$ contient le disque ouvert de rayon $1/(4M)$. Quelle est la diffénce avec le théorème de Kœbe ?

Exercice 9.2 (**) : théorème de Bloch. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ avec $f'(0) = 1$.
a) Montrer que

$$t \in [0,1] \mapsto t \sup\{|f'(z)|\,;\, |z| \leq 1 - t\}$$

est continue sur $[0,1]$ et en déduire qu'il existe $t_0 > 0$ et $a \in D(0,1)$ avec $|a| \leq 1 - t_0$, $|f'(a)| = 1/t_0$ et $|f'(z)| < 1/t$ pour $t < t_0$ et $|z| \leq 1 - t$.
b) Montrer que $|f'(z)| \leq 2/t_0$ dans le disque $D(a, t_0/2)$ et en déduire que la fonction g définie dans $D(0,1)$ par

$$g(z) = f(z) - f(a)$$

vérifie $|g(z)| \leq 1$ dans $D(a, t_0/2)$.
c) Déduire de l'exercice **9.1** que $f(D(0,1))$ contient le disque de centre $f(a)$ et de rayon $1/16$.
d) Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour toute fonction f holomorphe dans $D(0,1)$, $f(D(0,1))$ contient un disque de rayon $C|f'(0)|$.

[1] Une référence bibliographique pour ces aspects est le cours d'arithmétique de J.P. Serre, Presses Universitaires de France, 1970.

Exercice 9.3 (*) : application du théorème de Bloch. Soit F une fonction entière non constante. En utilisant la conclusion de l'exercice **9.2** avec les fonctions

$$z \mapsto F(\lambda z + \mu)$$

montrer que $F(\mathbb{C})$ contient des disques de rayon arbitrairement grand.

Exercice 9.4. (*) : une application du grand théorème de Picard. Montrer que, si P est un polynôme, l'équation

$$e^z = p(z)$$

a une infinité de solutions.

Chapitre 10

Texte et corrigé du DM1 - 2009-2010

Exercice I (autour de la formule de Cauchy-Pompeïu).

1.1. *Soit f une fonction de classe C^1 au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe. En appliquant la formule de Cauchy-Pompeïu à la fonction*

$$F_z\ : \zeta \in \overline{D(0,1)} \longmapsto f(\zeta)\Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big)$$

(pour $z \in D(0,1)$), vérifier que la fonction f peut se représenter dans le disque unité ouvert $D(0,1)$ par la formule :

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} + \frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} f(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$$

(où l'on a noté $\zeta = \xi + i\eta$ le point courant de $\mathbb{R}^2$). Que devient cette formule de représentation lorsque f satisfait de plus $\partial f/\partial\overline{\zeta} \equiv 0$ dans le disque unité ouvert ?

Il s'agit d'un calcul.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_z}{\partial \overline{\zeta}} &= f(\zeta) \times \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\Big[\frac{1-\zeta\overline{\zeta}}{1-\overline{\zeta}z}\Big] + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \times \Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big) \\
&= f(\zeta) \times \Big(\frac{-\zeta(1-\overline{\zeta}z) - (1-|\zeta|^2)(-z)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \times \Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big) \\
&= f(\zeta) \times \Big(\frac{z-\zeta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \times \Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big).
\end{aligned}$$

On remarque aussi que F_z est identiquement nulle sur le cercle de rayon 1, ce qui implique la disparition de l'intégrale « de contour » dans la formule de Cauchy-Pompeïu lorsqu'on l'applique pour représenter F_z au point z, soit $F_z(z) = f(z)$. La formule demandée résulte immédiatement de la formule de Cauchy-Pompeïu. On note la simplification de $z - \zeta$ par $\zeta - z$ dans l'une des deux intégrales sur $D(0,1)$ figurant au second membre, dans l'expression de

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{\partial F_z}{\partial \overline{\zeta}}\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

(cette simplification amène d'ailleurs par un changement de signe).

1.2. *Soit* $\dot f \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ *et* f *un représentant de* $\dot f$ *dans* $\mathcal{L}^2(D(0,1), d\xi d\eta)$. *Montrer que la fonction*

$$B[\dot f]\ : z \in D(0,1) \longmapsto \frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)\,d\xi d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$$

est une fonction holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$ *; calculer, pour* $n \in \mathbb{N}$, $\partial^n[B(\dot f)]/\partial z^n(0)$.

L'holomorphie est une propriété locale et il suffit de la prouver dans un disque $D(0,r)$ avec $r<1$. Si $\zeta \in \overline{D(0,1)}$ et $z \in \overline{D(0,r)}$, la fonction $(\zeta,z) \mapsto (1-\overline{\zeta}z)^2$ ne s'annule pas et est donc minorée en module sur $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,r)}$ par une constante $\gamma_r > 0$. Pour tout $\zeta \in \overline{D(0,1)}$, pour tout $z \in \overline{D(0,r)}$, on a

$$\Big|\frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big| \leq \frac{\sup\limits_{\overline{D(0,1)}} |f(z)|}{\gamma_r} = M_r.$$

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres assure donc la continuité de

$$z \mapsto B[\dot f](z) := \frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,d\xi\,d\eta$$

(on prend comme « chapeau majorant » pour la clause de domination la fonction constante égale à M_r sur $D(0,1)$ et donc évidemment intégrable). Pour montrer l'holomorphie de $B[\dot f]$ dans $D(0,r)$, on utilise le théorème de Morera. Soit T un triangle plein inclus dans $D(0,r)$. Le théorème de Fubini permet de démontrer

$$\int_{\partial T}\Big[\iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big]\,dz = \iint_{D(0,1)} f(\zeta)\Big[\int_{\partial T}\frac{dz}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big]\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Il s'applique car la fonction de deux variables

$$(\zeta,z) \mapsto \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$$

est bornée en module (donc intégrable) sur $D(0,1)\times\partial T$. Le fait que, pour tout $\zeta \in D(0,1)$, on ait

$$\int_{\partial T}\frac{dz}{(1-\overline{\zeta}z)^2} = 0$$

résulte de l'holomorphie dans $D(0,r)$ de la fraction rationnelle (en z) sous l'intégrale curviligne.

Le calcul des dérivées successives de $B[\dot f]$ se fait en dérivant sous le signe somme. On peut en effet intervertir dérivation par rapport au paramètre et intégrale car les inégalités de Cauchy impliquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\zeta \in D(0,1)$, pour tout z dans $D(0,r-\epsilon)$ (avec $\epsilon < r$ arbitrairement petit)

$$\Big|\frac{\partial^n}{\partial z^n}\Big(\frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big)\Big| \leq M_r/\epsilon^n.$$

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique donc et donne

$$\frac{d^n}{dz^n}B[\dot f](z) = \frac{(n+1)!}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^n\,d\xi\,d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^{2+n}}.$$

La valeur de cette dérivée n-ième en 0 est

$$\frac{d^n}{dz^n} B[\dot{f}](0) = \frac{(n+1)!}{\pi} \iint_{D(0,1)} \overline{\zeta}^n f(\zeta)\, d\xi\, d\eta.$$

1.3. *Montrer que le système de classes de fonctions $(\dot{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où*

$$\varphi_n \ : \zeta \in D(0,1) \longmapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, \zeta^n,$$

forme un système orthonormé de l'espace de Hilbert $L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ et que l'on a, dans cet espace de Hilbert, pour tout $\dot{f} \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$,

$$\dot{B}[\dot{f}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \dot{B}[\dot{f}], \dot{\varphi}_n\rangle\, \dot{\varphi}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \dot{f}, \dot{\varphi}_n\rangle\, \dot{\varphi}_n.$$

Un calcul d'intégrales en polaire donne, si n_1 et n_2 sont deux entiers positifs,

$$\iint_{D(0,1)} \zeta^{n_1} \overline{\zeta}^{n_2}\, d\xi\, d\eta = \int_0^1 r^{n_1+n_2+1}\, dr \times \int_0^{2\pi} e^{i(n_1-n_2)\theta}\, d\theta.$$

Si $n_1 \neq n_2$, cette intégrale vaut zéro (orthogonalité des fonctions $\theta \mapsto e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, sur $[0, 2\pi]$). Pour $n_1 = n_2$, on trouve $\pi/(n_1+1)$. Le système des classes de fonctions $(\dot{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(D(0,1))$ est donc bien orthonormé. La fonction f est un représentant d'un élément $\dot{f}$ de cet espace $L^2(D(0,1))$ (car c'est une fonction continue bornée, donc le carré de son module est intégrable) et l'on a (d'après l'inégalité de Bessel, voir le cours de L3 sur les espaces de Hilbert, c'est juste une conséquence du théorème de Pythagore) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle \dot{f}, \dot{\varphi}_n\rangle|^2 \leq \iint_{D(0,1)} |f(\zeta)|^2\, d\xi d\eta < +\infty.$$

Or

$$\langle \dot{f}\ ,\ \dot{\varphi}_n\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iint_{D(0,1)} \overline{\zeta}^n\, f(\zeta)\, d\xi\, d\eta$$

et, par conséquent,

$$\langle \dot{f}\ ,\ \dot{\varphi}_n\rangle\, \varphi_n = \frac{n+1}{\pi} z^n = \frac{z^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (B[\dot{f}])(0).$$

La suite des classes des fonctions

$$\Phi_N := \sum_{n=0}^{N} \langle \dot{f}\ ,\ \dot{\varphi}_n\rangle\, \varphi_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{d^n}{dz^n} (B[\dot{f}])(0)\, z^n$$

converge dans $L^2(D(0,1))$ (c'est une suite de Cauchy) vers un certain élément $\dot{g}$. Mais on sait que la suite $(\Phi_N)_N$ converge presque partout (dans $D(0,1)$ en tout cas) vers $B[\dot{f}]$ (c'est la formule de Taylor à l'origine pour la fonction $B[\dot{f}]$ dont on sait qu'elle est holomorphe dans le disque $D(0,1)$ d'après la question **2)**). Comme on sait d'autre part qu'il existe une sous-suite de la suite $(\Phi_N)_N$ convergeant presque partout vers un représentant g de $\dot{g}$, on en déduit que $B[f]$ représente un élément de $L^2(D(0,1))$, précisément cet élément $\dot{g}$. On peut écrire, dans $L^2(D(0,1))$,

$$\dot{g} = \dot{B}[\dot{f}] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \dot{f}\,,\, \dot{\varphi}_n\rangle\, \dot{\varphi}_n,$$

mais aussi bien sûr, puisque $\dot{g} = \dot{B}[\dot{f}]$ est dans l'adhérence du sous-espace engendré par les $\dot{\varphi}_n$,

$$\dot{g} = \dot{B}[\dot{f}] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \dot{B}[\dot{f}]\,,\, \dot{\varphi}_n\rangle\, \dot{\varphi}_n.$$

D'où le résultat.

1.4. *Montrer que l'ensemble des éléments $\dot{g} \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ admettant un représentant holomorphe dans $D(0,1)$ est un sous-espace fermé $A(D(0,1))$ de l'espace de Hilbert $L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ et que la projection orthogonale d'un élément $\dot{f} \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ sur ce sous-espace $A(D(0,1))$ est égale à $\dot{B}[\dot{f}]$.*

Si $(\dot{g}_n)$ est une suite d'éléments de $A(D(0,1))$, on a, pour n, m dans $\mathbb{N}$ et z dans $D(0, 1-2\epsilon)$ (d'après la formule de la moyenne « volumique »)

$$(g_n - g_m)(z) = \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{D(z,\epsilon} (g_n(\zeta) - g_m(\zeta))\, d\xi\, d\eta.$$

D'où, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |(g_n - g_m)(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} \Big(\iint_{D(z,\epsilon)} |g_n(\zeta) - g_m(\zeta)|^2\, d\xi\, d\eta \Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{\|\dot{g}_n - \dot{g}_m\|_{L^2(D(0,1))}}{\sqrt{\pi}\epsilon}\,. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Si en plus la suite $(\dot{g}_n)_n$ converge dans $L^2(D(0,1))$ vers un élément $\dot{f}$, elle est de Cauchy dans $L^2(D(0,1))$ et la suite de fonctions holomorphes $(g_n)_n$ satisfait (d'après l'inégalité (10.1) juste établie) le critère de Cauchy uniforme sur le disque $D(0, 1-2\epsilon)$. Elle converge donc uniformément sur ce disque vers une fonction holomorphe h. Comme ϵ est arbitraire, on en déduit (en utilisant le fait qu'au moins une sous suite de $(g_n)_n$ doit converger vers un représentant de $\dot{g}$), que $\dot{g}$ admet un représentant h holomorphe dans $D(0,1)$. Le sous-espace $A(D(0,1))$ est donc fermé.

Les éléments $(\dot{\varphi}_n)_n$ forment un système orthonormé dans $A(D(0,1))$. On vérifie que c'est une base hilbertienne de cet espace en montrant que le seul élément $\dot{g}$ de $A(D(0,1))$ orthogonal à tous les $\dot{\varphi}_n$ est la classe de la fonction nulle : en effet, si $\dot{g}$ a pour représentant la fonction holomorphe

$$z \mapsto g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} a_k \varphi_k(z)\,,$$

on voit que

$$\begin{aligned} \langle \dot{g}\,,\, \dot{\varphi}_n \rangle &= \lim_{r\to 1^-} \Big(\iint_{D(0,r)} f(\zeta) \overline{\varphi_n(\zeta)}\, d\xi d\eta \Big) \\ &= \lim_{r\to 1^-} \Big(\iint_{D(0,r)} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \Big) \overline{\varphi_n(\zeta)}\, d\xi d\eta \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to 1^-}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big(\iint_{D(0,r)} \zeta^k\,\overline{\varphi_n(\zeta)}\,d\xi d\eta\Big)\Big)\\
&= \lim_{r\to 1^-}\Big(2\pi a_n \times \frac{r^{2(n+1)}}{2(n+1)} \times \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\Big)\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\,a_n.
\end{aligned}
$$

Si $\dot g$ est orthogonal à tous les $\dot\varphi_n$, on a $a_n = 0$ pour tout n, ce qui implique $\dot g = 0$. Comme la famille $(\dot\varphi_n)_n$ est une base hilbertienne de $A(D(0,1))$, les formules établies à la question **3)** montrent que $B[\dot f]$ est bien la projection orthogonale de $\dot f$ sur le sous-espace fermé engendré par les $\dot\varphi_n$, $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire sur le sous-espace $A(D(0,1))$. C'est ce que l'on devait démontrer.

Remarque. L'opérateur introduit dans cet exercice

$$B\ : L^2(D(0,1)) \to A(D(0,1))$$

s'appelle *l'opérateur de Bergman* (ou *projecteur de Bergman*) du disque unité et le « noyau »

$$(\zeta,z)\in \overline{D(0,1)}\times D(0,1)\mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-\bar\zeta z)^2}$$

qui le « représente » (voir la question **2)**) s'appelle le *noyau de Bergman* de ce même disque.

Exercice II (formule de Lelong-Poincaré, calcul de degré).

II.1. *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. Pourquoi la fonction f n'a-elle qu'un nombre fini de zéros dans un sous-ensemble compact arbitraire K de U ?*

Il fallait ajouter, vous l'avez deviné, que la fonction f doit être supposée non identiquement nulle sur les diverses composantes connexes de U. Cela manquait ici à l'hypothèse. Si tel est le cas, les zéros de f sont isolés (d'après le principe des zéros isolés) et le fait qu'il y en ait une infinité dans un compact K de U contredit le théorème de Bolzano-Weierstrass : dans un compact de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{R}^n$), tout ensemble infini borné a nécessairement un point d'accumulation !

II.2. *Montrer que, si φ est une fonction de classe C^2 et à support compact dans U, on a la formule de Lelong-Poincaré :*

$$2\pi \sum_{\{\alpha\in \operatorname{supp}\varphi\,;\, f(\alpha)=0\}} m_f(\alpha)\varphi(\alpha) = \iint_U \log|f(\zeta)|\,\Delta[\varphi(\zeta)]\,d\xi d\eta.$$

On peut supposer U connexe (sinon, on raisonne pour chaque composante connexe de U et on additionne). Le plus élégant ici est d'utiliser la *formule de la divergence* dans un ouvert borné Ω à frontière C^1 contenant le support de φ, tel que $\overline{\Omega}\subset U$ et que f ne s'annule pas sur le bord de Ω. D'après la question **1)**, la fonction f n'a qu'un nombre fini de zéros, $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ dans $\overline{\Omega}$. Autour de chacun de ces zéros (comme dans la preuve de la formule de Cauchy-Pompeïu), on considère un petit disque $D(\alpha_j,\epsilon)$ de manière à ce que $\overline{D(\alpha_j,\epsilon)}\subset\Omega$ et que les disques fermés $\overline{D(\alpha_j,\epsilon)}$ soient deux à deux disjoints. Si (P,Q) est un champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Omega_\epsilon} = \overline{\Omega}\setminus\bigcup_j D(\alpha_j,\epsilon)$, on a

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon}\langle (P,Q),\nu_{\rm ext}\rangle\,d\sigma = \int_{\gamma_\epsilon}(-Q dx + P dy)\,, \tag{10.2}$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de Lebesgue sur le bord de Ω_ϵ, le chemin paramétré γ_ϵ désignant le bord paramétré de Ω_ϵ, le paramétrage étant tel qu'en le suivant, on conserve le domaine Ω_ϵ sur notre gauche (règle du « bonhomme d'Ampère »). On note que la normale extérieure ν_{ext} est dirigée précisément par le vecteur $(dy, -dx)$ lorsque (dx, dy) désigne le déplacement infinitésimal sur le bord en gardant le domaine Ω_ϵ à sa gauche (faire un petit dessin, il faut tourner de $-\pi/2$ pour trouver la direction de ν_{ext} !).
D'après Green-Riemann,

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} (Pdy - Qdx) = \iint_{\Omega_\epsilon} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, d\xi d\eta\,. \qquad (10.3)$$

En combinant (10.2) et (10.3), on obtient la *formule de la divergence*

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \langle (P, Q), \nu_{\text{ext}}\rangle\, d\sigma = \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, d\xi d\eta\,.$$

Si on applique cette formule à un champ de gradient $(P, Q) = \nabla G$, où G est de classe C^2 au voisinage de $\overline{\Omega}_\epsilon$, on en déduit la formule

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial \nu_{\text{ext}}}\, d\sigma = \iint_{\Omega_\epsilon} \Delta(G)\, d\xi\, d\eta$$

puisque $\operatorname{div}(\nabla G) = \Delta(G)$.

Si l'on prend deux champs de gradient ∇G_1 et ∇G_2, G_1 et G_2 étant de classe C^2 au voisinage de $\overline{\Omega}_\epsilon$, on a la formule

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \Big(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \nu_{\text{ext}}} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \nu_{\text{ext}}}\Big)\, d\sigma = \iint_{\Omega_\epsilon} \Big(G_1 \Delta(G_2) - G_2 \Delta(G_1)\Big)\, d\xi\, d\eta. \qquad (10.4)$$

Si f est une fonction holomorphe, on voit que dans l'ouvert où f ne s'annule pas,

$$\frac{\partial \log|f|}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log|f|^2}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log f\overline{f}}{\partial\zeta} = \frac{\overline{f}}{2|f|^2} = \frac{1}{2f}$$

et, par conséquent,

$$\Delta \log|f| = 4\partial\overline{\partial\zeta}\Big[\frac{\partial \log|f|}{\partial\zeta}\Big] = 2\partial\overline{\partial\zeta}(1/f) = 0.$$

Si on prend $G_1 = \log|f|$ et $G_2 = \varphi$, la formule (10.4) devient

$$\iint_{\Omega_\epsilon} (\log|f|)\Delta[\varphi]\, d\xi\, d\eta = -\sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_{j,\epsilon}} \Big(\log|f| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{j,\text{ext}}} - \varphi \frac{\partial \log|f|}{\partial \nu_{j,\text{ext}}}\Big)\, d\sigma_{j,\epsilon}\,, \qquad (10.5)$$

où $d\sigma_{j,\epsilon}$ est la mesure de Lebesgue sur le cercle de centre α_j et de rayon ϵ, la normale extérieure $\nu_{j,\text{ext}}$ pointant cette fois vers l'extérieur du disque $D(\alpha_j, \epsilon)$.
Il reste (comme dans la preuve de la formule de Cauchy-Pompeïu) à faire tendre ϵ vers 0. Près de α_j, on peut écrire $|f(\zeta)| = |\zeta - \alpha_j|^{m_f(\alpha_j)} \times |g_j|$, où g_j ne s'annule pas. Lorsque ϵ tend vers 0, la limite du membre de droite de (10.5) est donc la même que la limite lorsque ϵ tend vers 0 de

$$-\sum_{j=1}^{N} m_f(\alpha_j) \int_{\gamma_{j,\epsilon}} \Big(\log\epsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\text{ext}}} - \varphi \frac{\partial \log|\zeta - \alpha_j|}{\partial\nu_{j,\text{ext}}}\Big)\, d\sigma_{j,\epsilon}.$$

Or un calcul immédiat montre que sur le bord de $D(\alpha_j,\epsilon)$,

$$\langle \nabla \log|\zeta-\alpha_j|, \nu_{j,\mathrm{ext}}\rangle = \frac{1}{\epsilon}.$$

Il en résulte donc que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\sum_{j=1}^N m_f(\alpha_j)\int_{\partial D(\alpha_j,\epsilon)} \varphi\frac{\partial \log|\zeta-\alpha_j|}{\partial \nu_{j,\mathrm{ext}}}\, d\sigma_{j,\epsilon}\Big) = \sum_{j=1}^N m_f(\alpha_j)\varphi(\alpha_j).$$

D'autre part, comme $\epsilon\log\epsilon$ tend vers 0, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\log\epsilon\sum_{j=1}^N m_f(\alpha_j)\int_{\partial D(\alpha_j,\epsilon)} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{,\mathrm{ext}}}\, d\sigma_{j,\epsilon}\Big) = 0.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 dans (10.5), on obtient donc bien la formule de Lelong-Poincaré.

Remarque. La formule de Lelong-Poincaré, dans la mesure où elle permet de retrouver zéros et multiplicités d'une fonction holomorphe à partir de la fonction elle-même (on prend le Laplacien du logarithme du module, au sens que vous verrez plus tard des *distributions*), joue un rôle précieux en géométrie algébrique ainsi qu'en théorie des nombres.

II.3. *Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux et d le maximum de leurs degrés. Vérifier, si $\gamma_R\ : t\in[0,1]\longmapsto Re^{2i\pi t}$, que*

$$\begin{aligned} d &= \frac{i}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\overline{\partial}\Big[\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big] \\ &= \frac{i}{2\pi}\iint_{\mathbb{C}}\partial\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big)\,. \end{aligned}$$

D'après la formule de Green-Riemann, on a, pour $R>0$ fixé :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R}\overline{\partial}\Big[\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big] &= \iint_{D(0,R)} d\Big[\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big)\Big] \\ &= \iint_{D(0,R)} \partial\Big[\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{10.6}$$

En effet, P et Q n'ont par hypothèse aucun zéro commun (ils sont supposés premiers entre eux) et la fonction $\log(|P|^2+|Q|^2)$ est donc bien de classe C^∞ dans $\mathbb{C}$. On a d'autre part

$$\overline{\partial}\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2] = \frac{P(\zeta)\overline{P'(\zeta)}+Q(\zeta)\overline{Q'(\zeta)}}{|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2}\, d\overline{\zeta}.$$

On remarque que, pour $R_0>0$ suffisamment grand et $|\zeta|>R_0$,

$$\begin{aligned} \frac{P(\zeta)\overline{P'(\zeta)}+Q(\zeta)\overline{Q'(\zeta)}}{|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2} &= \frac{d}{\overline{\zeta}}\Bigg(\frac{1+\sum\limits_{\alpha+\beta>0} u_{\alpha,\beta}\zeta^{-\alpha}\overline{\zeta}^{-\beta}}{1+\sum\limits_{\alpha+\beta>0} v_{\alpha,\beta}\zeta^{-\alpha}\overline{\zeta}^{-\beta}}\Bigg) \\ &= \frac{d}{\overline{\zeta}}\Big(1+\sum_{\alpha+\beta>0} w_{\alpha,\beta}\,\zeta^{-\alpha}\overline{\zeta}^{-\beta}\Big)\,, \end{aligned} \tag{10.7}$$

les séries doubles ci-dessus convergeant normalement dans $\{|\zeta| > R_0\}$. On a donc

$$\int_{\gamma_R} \overline{\partial} \log[|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2] = d \int_{\gamma_R} \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}} + O(1/R) = -2i\pi d + O(1/R).$$

La première égalité est ici démontrée. Il ne reste pour vérifier la seconde que de s'assurer que l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{C}} \partial\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2]\Big)$$

est bien convergente. En utilisant (10.7), on observe que, pour $|\zeta| > R_0$,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big[\frac{P(\zeta)\overline{P'(\zeta)} + Q(\zeta)\overline{Q'(\zeta)}}{|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2}\Big] = O(1/|\zeta|^3)$$

car $(\partial/\partial\zeta)(d/\overline{\zeta}) = 0$. Comme $1/|\zeta|^3$ est intégrable dans $\{|\zeta| > R_0\}$, l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{C}} \partial\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2]\Big)$$

est bien absolument convergente. La seconde formule résulte de la première, combinée avec (10.6) (identité dans laquelle on fait tendre R vers $+\infty$).

Exercice III (développement de Taylor en ζ et $\overline{\zeta}$).

III.1. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, non identiquement nulle et telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un changement de variable $z \mapsto w = w(z)$, réalisant un biholomorphisme entre un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}_z$ et un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}_w$, et tel que*

$$f(z(w)) = w^m$$

au voisinage de 0 pour un certain entier $m > 0$ (la multiplicité de 0 comme zéro de f).

Si f est non identiquement nulle au voisinage de l'origine, il existe un disque $D(0,r)$ dans lequel on peut écrire $f(z) = z^m g(z)$, où g est une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Comme le disque $D(0,r)$ est simplement connexe, toute fonction holomorphe g de $D(0,r)$ dans $\mathbb{C}^*$ s'écrit $g = \exp h$ avec h holomorphe dans $D(0,r)$. Pour construire $h(z)$, il suffit de considérer le chemin $t \mapsto g(tz)$, puis d'intégrer sur ce chemin (de support inclus dans $\mathbb{C}^*$ par hypothèses) la forme du/u. Dans $D(0,r)$, f se représente donc par $f(z) = z^m \exp(h(z)) = (z\exp(h(z)/m))^m$. Si l'on pose $w = z\exp(h(z)/m)$, on constate que $z \mapsto w(z)$ est une transformation Φ de $D(0,r)$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dont la différentielle (au sens réel) en $(0,0)$ est inversible (puisque $w'(0) = \exp(h(0)/m) \neq 0$ et que $|w'(0)|^2$ représente précisément le jacobien de $d\Phi_{(0,0)}$). Le résultat demandé résulte donc du théorème d'iinversion locale (cours de Calcul Différentiel). Comme $w = z\exp(h(z)/m)$ et que $f(z) = z^m\exp(h(z))$ au voisinage de 0, on a bien, si $w\ : w \mapsto w(z)$ désigne l'application réciproque (qui d'ailleurs satisfait les conditions de Cauchy-Riemann, donc est aussi holomorphe, ce d'après la formule de Leibniz $(d\Phi^{-1})_{\Phi(x,y)} = (d\Phi_{x,y})^{-1}$ et le fait que l'inverse d'une similitude directe est une similitude directe), $f(z(w)) = w^m$ dans le voisinage de 0 dans $\mathbb{C}_w$ en correspondance biholomorphe avec un disque $D(0,\rho)$, $\rho < r$, de $\mathbb{C}_z$ sur lequel l'inversion locale s'applique.

III.2. *Soit, pour $\epsilon > 0$ assez petit, γ_ϵ le lacet $t \in [0,1] \mapsto w^{-1}(\epsilon e^{2i\pi t})$. Montrer que, si φ est une fonction de classe C^∞ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k\varphi}{\partial\zeta^k}(0)\frac{\zeta^k}{k!}\Big)\frac{d\zeta}{f(\zeta)} \\ &= \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\zeta^{m-1}}\Big[\frac{\zeta^m\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big]_{|\zeta=0}\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $\zeta = \zeta(w)$, l'intégrale dont on étudie le comportement en ϵ lorsque ϵ tend vers 0 devient :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{w(\zeta)}\, d\zeta = \int_{|w|^m=\epsilon} \frac{\varphi(\zeta(w))}{w^m}\zeta'(w)\, dw.$$

Le comportement de la limite est le même que celui de la limite lorsque ϵ tend vers 0^+ de

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=\epsilon} \frac{\psi(w)}{w^m}\, dw\,,$$

où $\psi(w) = \varphi(\zeta(w))\zeta'(w)$. La fonction ψ est une fonction C^∞ au voisinage de l'origine que l'on peut donc développer au voisinage de 0 en série de Taylor à l'ordre m :

$$\psi(\sigma + i\tau) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\alpha+\beta=k} \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^k\psi}{\partial\sigma^\alpha\partial\tau^\beta}(0)\sigma^\alpha\tau^\beta + O(|\sigma+i\tau|^m).$$

On remarque que l'on peut aussi écrire ce développement en utilisant les opérateurs $\partial/\partial w$ et $\partial/\partial\overline{w}$ en place de $\partial/\partial\sigma$ et ∂/τ (où $\sigma = \operatorname{Re} w$ et $\tau = \operatorname{Im} w$). On obtient ainsi au voisinage de $w = 0$,

$$\psi(w) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\alpha+\beta=k} \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^k\psi}{\partial w^\alpha\partial\overline{w}^\beta}(0)w^\alpha\overline{w}^\beta + O(|w|^m). \tag{10.8}$$

Si l'on intègre la forme $\psi(w)dw/w^m$ (ψ étant développé sous la forme (10.8)) sur le cercle $|z| = \epsilon$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, on constate que toutes les intégrales

$$\int_{|w|=\epsilon} w^{\alpha-m}\overline{w}^\beta dw\,,\ \alpha\in\mathbb{N},\ \beta\in\mathbb{N},\ \alpha+\beta\le m-1, \tag{10.9}$$

sont nulles, sauf si $\alpha - m - \beta + 1 = 0$, i.e. $\alpha - \beta = m - 1$. La seule possibilité pour avoir une contribution non nulle est $\alpha = m-1$ et $\beta = 0$, auquel cas l'intégrale est égale à $2i\pi$. On voit donc que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\psi}{\partial w^{m-1}}(0).$$

Il faut maintenant pour finir revenir à une expression en termes de la fonction φ. L'expression de la limite en termes de φ (a priori compliquée) se présente certainement de par la règle de Leibniz sous la forme d'une combinaison des $(\partial^l/\partial z^l)[\varphi](0)$,

$l = 0, ..., m-1$. Ceci implique que résultat resterait inchangé si l'on supposait que φ est remplacé par son « polynôme de Taylor holomorphe » :

$$P_{\varphi,m-1}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(0)\, z^k.$$

Or ce polynôme $P_{\varphi,m-1}$ est une fonction holomorphe de z. La formule des résidus s'applique si l'on fait cette substitution et nous assure que la limite cherchée (l'expression est dans ce cas en fait constante en fonction de ϵ) est aussi égale à $\mathrm{Res}(P_\varphi\, d\zeta/f(\zeta), 0)$, soit à

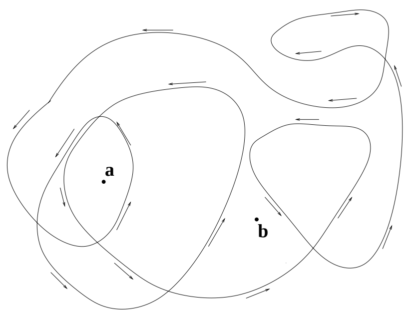
$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \Big(\frac{\zeta^m P_\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big)_{|\zeta=0}.$$

Or, comme $(\partial/\partial\zeta)(\overline{\zeta}) = 0$, on a

$$\frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \Big(\frac{\zeta^m P_\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big)_{|\zeta=0} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial\zeta^{m-1}} \Big(\frac{\zeta^m \varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big)_{|\zeta=0}.$$

On a obtenu le résultat demandé.

Exercice IV (indice et intégrale d'une forme localement exacte sur un lacet continu). *Soit a et b deux nombres complexes distincts et γ le lacet continu de $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ représenté ci-dessous (et parcouru une seule fois dans le sens indiqué). Calculer en fonction de a et b l'intégrale le long de γ de la forme différentielle $dz/((z-a)^2(z-b))$ après avoir justifié que cette 1-forme était localement exacte au voisinage du support de γ. Cette forme est-elle exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$?*

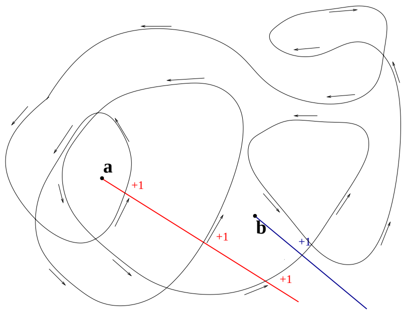


La forme $f(z)\,dz$ est bien localement exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ puisque la fraction rationnelle $f(z) = 1/(z-a)^2(z-b)$ est holomorphe hors de ses pôles a et b. On calcule dans un premier temps les indices $I(\gamma, a) = +1+1+1 = 3$ et $I(\gamma, b) = +1$ en traçant une demi-droite issue de ces points et en comptant avec $+1$ les intersections de γ avec la demi-droite se faisant de gauche à droite, -1 les intersections de γ avec la demi-droite se faisant de droite à gauche (voir la figure). L'intégrale I à calculer est égale (par homotopie entre lacets libres) à

$$I = \mathrm{Ind}(\gamma, a) \int_{\gamma_{a,\epsilon}} \frac{dz}{(z-a)^2(z-b)} + \mathrm{Ind}(\gamma, b) \int_{\gamma_{b,\epsilon}} \frac{dz}{(z-a)^2(z-b)},$$

où $\gamma_{a,\epsilon} \ : t \in [0,1] \mapsto a + \epsilon e^{2i\pi t}$ et $\gamma_{b,\epsilon} \ : t \in [0,1] \mapsto b + \epsilon e^{2i\pi t}$ (avec ϵ suffisamment petit). Il résulte de la formule de Cauchy (en b) que

$$\int_{\gamma_{b,\epsilon}} \frac{1}{(z-a)^2} \frac{dz}{(z-b)} = \frac{2i\pi}{(b-a)^2}.$$



Il résulte de la formule de Cauchy (en a cette fois) pour les dérivées que

$$\int_{\gamma_{a,\epsilon}} \frac{1}{(z-b)} \frac{dz}{(z-a)^2} = 2i\pi \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-b}\right)_{z=a} = -\frac{2i\pi}{(a-b)^2}.$$

Le résultat final est donc

$$I = 3 \times \frac{-2i\pi}{(b-a)^2} + \frac{2i\pi}{(b-a)^2} = -\frac{4i\pi}{(b-a)^2}.$$

Comme $I \neq 0$, la forme $f(z)\,dz$ n'est pas exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.

Chapitre 11

Texte et corrigé du DM1 - 2010-2011

Nota. Les renvois aux résultats du cours font référence au polycopié de P. Charpentier en ligne :

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement /fichiers-master1/Analyse_Complexe.pdf`

Problème I (un théorème de l'application ouverte « topologique »).
I.1 *Soit f une application continue injective de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout s dans $[0,1]$, on considère le lacet*

$$\gamma_s \ : t \in [0,1] \longmapsto f\Big(\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big) - f\Big(-s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big).$$

a) *Rappeler ce qu'est la relation d'équivalence correspondant à l'homotopie entre lacets libres (dans l'ouvert $\mathbb{C}^*$). Quel est le groupe d'homotopie de $\mathbb{C}^*$ (pour cette relation d'équivalence) ?*

Deux lacets continus $\gamma_0 \ : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ et $\gamma_1 \ : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ sont homotopes (considérés comme lacets continus de $\mathbb{C}^*$ à extrémités libres dans $\mathbb{C}^*$) si et seulement si il existe une application continue $F \ : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{array}{rcl} \forall\, t \in [0,1],\ F(t,0) & = & \gamma_0(t) \\ \forall\, t \in [0,1],\ F(t,1) & = & \gamma_1(t) \\ \forall\, s \in [0,1],\ F(0,s) & = & F(1,s)\,. \end{array}$$

Le groupe d'homotopie de $\mathbb{C}^*$ pour cette relation d'équivalence est isomorphe au groupe d'homotopie de $\mathbb{C}^*$ pour la relation d'équivalence entre lacets d'origine-extrémité marquée $a \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire au groupe $\pi_1(\mathbb{C}^*, a)$ qui ne dépend pas de a (à isomorphisme près) et est le groupe $\pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$. L'isomorphisme est ici matérialisé par $\dot\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \longmapsto \mathrm{Ind}(\gamma,0) = \deg(\gamma) \in \mathbb{Z}$ (on choisit un représentant arbitraire γ de la classe d'homotopie $\dot\gamma$).

b) *Montrer que tous les γ_s, $s \in [0,1]$, sont des lacets continus de support dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$. En déduire $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$.*

La définition de γ_s est licite car, pour tout $t \in [0,1]$, les points

$$z_1(t,s) = \frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\,, \quad z_2(t,s) = -s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}$$

sont des points de $\overline{D(0,1)}$ (ensemble où f est définie) lorsque $s \in [0,1]$. D'autre part, ces deux points $z_1(t,s)$ et $z_2(t,s)$ sont distincts, car

$$z_1(t,s) = z_2(t,s) \Longrightarrow s = -1\,,$$

ce qui est exclu. L'injectivité de f assure donc $f(z_1(t,s)) \neq f(z_2(t,s))$ lorsque (s,t) parcourt $[0,1] \times [0,1]$. Le lacet γ_s a donc son support dans $\mathbb{C}^*$ pour tout $s \in [0,1]$. C'est un lacet continu comme composé d'applications continues.
Pour réaliser une homotopie entre lacets libres (de $\mathbb{C}^*$) entre γ_0 et γ_1, on pose, pour $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$,

$$F(t,s) = \gamma_s(t)\,.$$

La fonction F est une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{C}^*$, avec $F(0,s) = F(1,s)$ pour tout $s \in [0,1]$. La fonction F réalise ainsi (par définition, rappelée au **I.1.a)** ci-dessus) l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$ entre les lacets γ_0 $(s=0)$ et γ_1 $(s=1)$.
Comme la forme dz/z est fermée dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres de $\mathbb{C}^*$, on a (Théorème I.3.1 du cours)

$$\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)\,.$$

I.2 *Montrer qu'il existe une fonction continue $c_1 \;: [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que l'on ait $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour tout $t \in [0,1]$. Vérifier*[1] *qu'il existe deux entiers relatifs k_1 et l_1 tels que*

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,1/2]\,,\ c_1(t+1/2) - c_1(t) &= (2k_1+1)i\pi \\ \forall\, t \in [1/2,1]\,,\ c_1(t-1/2) - c_1(t) &= (2l_1+1)i\pi. \end{aligned}$$

Comme γ_1 est un lacet de $\mathbb{C}^*$, il existe un relèvement continu $c_1 \;: [0,1] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$. Il suffit pour cela de remarquer que la forme dz/z est fermée dans $\mathbb{C}^*$, donc localement exacte au voisinage du support de γ_1, puis de choisir (il en existe d'après la Proposition I.3.1 du cours) une primitive F de dz/z le long de γ_1. Si $t_0 \in [0,1]$, on sait (toujours la Proposition I.3.1, couplée avec la Définition I.3.2) que F coincide dans un voisinage $V(\gamma(t_0))$ de $\gamma(t_0)$ avec une détermination F_{t_0} du logarithme (i.e. une primitive de dz/z). Si t est assez voisin de t_0 pour que $\gamma(t) \in V(\gamma(t_0))$, on a donc $\gamma(t) = \exp[F_{t_0}(\gamma(t))] = \exp[F(\gamma(t))]$. La fonction $c_1 = F \circ \gamma_1$ convient donc.
On remarque que, si $t \in [0,1/2]$,

$$\gamma_1(t+1/2) = f\Big(-\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) - f\Big(\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) = -\gamma_1(t)\,,$$

[1]On se servira du fait que $\gamma_1(t+1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1/2]$, $\gamma_1(t-1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [1/2,1]$.

et donc

$$\forall t \in [0,1/2], \quad \exp\Big(c_1(t+1/2) - c_1(t)\Big) = -1\,.$$

Comme la fonction

$$t \mapsto c_1(t+1/2) - c_1(t)$$

est continue sur $[0,1/2]$, et à valeurs dans le réseau $i\pi(2\mathbb{Z}+1)$, elle est constante, égale à $(2k_1+1)i\pi$; c'est la première formule voulue. On a aussi, si $t \in [1/2,1]$,

$$\gamma_1(t-1/2) = f\Big(-\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) - f\Big(\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) = -\gamma_1(t)\,,$$

donc aussi

$$\forall t \in [0,1/2], \quad \exp\Big(c_1(t-1/2) - c_1(t)\Big) = -1\,.$$

Comme la fonction

$$t \mapsto c_1(t-1/2) - c_1(t)$$

est continue sur $[1/2,1]$, et à valeurs dans le réseau $i\pi(2\mathbb{Z}+1)$, elle est constante, égale à $(2l_1+1)i\pi$; c'est la seconde formule demandée.

I.3 *En vérifiant, pour tout* $t \in [0,1/2]$, *que*

$$c_1(t+1/2) = c_1(t+1/2) + 2(k_1+l_1+1)i\pi\,,$$

montrer que $k_1 \neq l_1$, *puis que* $\mathrm{Ind}(\gamma_1,0) = k_1 - l_1 \neq 0$. *Déduire de* **I.1** *que l'on a nécessairement* $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0) \neq 0$.

On combine la première formule établie au **I.2** avec la seconde (mais écrite cette fois au point $t+1/2$ qui appartient bien à $[1/2,1]$ lorsque $t \in [0,1/2]$). Cela donne :

$$c_1(t+1/2) = c_1(t) + (2k_1+1)i\pi = \Big(c_1(t+1/2) + (2l_1+1)i\pi\Big) + (2k_1+1)i\pi.$$

Ceci est l'égalité voulue, dont l'on déduit immédiatement $k_1 + l_1 + 1 = 0$. Comme k_1 et l_1 sont des entiers, $k_1 = l_1 = -1/2$ est impossible et l'on a bien $k_1 \neq l_1$.
La première relation établie au **I.2**, écrite en $t = 0$, donne

$$c_1(1/2) - c_1(0) = (2k_1+1)i\pi\ ; \tag{†}$$

la seconde relation, écrite en $t = 1$, donne

$$c_1(1/2) - c_1(1) = (2l_1+1)i\pi. \tag{††}$$

En retranchant (††) de (†), on trouve $c_1(1) - c_1(0) = 2(k_1 - l_1)i\pi$. Or on a aussi $c_1(1) - c_1(0) = 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$ puisque $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour $t \in [0,1]$ (c_1 est un relèvement de γ_1). Comme $k_1 \neq l_1$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$. Les indices $\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$ et $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0)$ étant égaux (voir **I.1.b)**), on a donc aussi $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0) \neq 0$.

I.4 *On suppose que* $f(0)$ *est un point frontière de* $f(\overline{D(0,1)})$. *Montrer qu'il existe une suite* $(w_n)_n$ *de nombres complexes tendant vers* $f(0)$ *et tels que le lacet* Γ_n : $t \in [0,1] \longmapsto f(e^{it}) - w_n$ *ait son support dans* $\mathbb{C}^*$ *et soit d'indice nul par rapport à l'origine*[2].

[2] On utilisera pour cela en le justifiant le fait qu'une fonction continue ne s'annulant pas dans $\overline{D(0,1)}$ s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction continue dans $\overline{D(0,1)}$.

Si $f(0)$ est un point de la frontière de $f(\overline{D(0,1)})$, il existe une suite de points $(w_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers $f(0)$, avec

$$w_n \notin f(\overline{D(0,1)})\,.$$

Pour chaque tel w_n, $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$z \mapsto f(z) - w_n$$

ne s'annule pas dans $\overline{D(0,1)}$ et y admet un logarithme continu g_n. Le lacet

$$\Gamma_n :\ t \in [0,1] \mapsto f(e^{2i\pi t}) - w_n$$

est donc bien un lacet de $\mathbb{C}^*$, dont le degré (i.e. l'indice par rapport à l'origine) vaut

$$\deg \Gamma_n = \mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \frac{1}{2i\pi}(g_n(\Gamma_n(1)) - g_n(\Gamma_n(0))) = 0\,.$$

I.5 *Montrer (en utilisant le théorème de Rouché, version topologique) que* $\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \deg \gamma_0$ *pour n assez grand et conclure à une contradiction.*
Soit

$$\theta : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$$

le lacet correspondant au cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. On a

$$\gamma_0 = h \circ \theta$$

avec $h(z) = f(z) - f(0)$ et

$$\Gamma_n = h_n \circ \theta$$

avec $h_n(z) = f(z) - w_n$. Si $|w_n - f(0)|$ vérifie $|w_n - f(0)| < \min_{|z|=1} |h|/2$, ce qui est réalisé si $n \geq n_0$, n_0 étant choisi assez grand, on a

$$|h - h_n| \leq |h|$$

sur le support de θ. Le théorème de Rouché version topologique (Proposition I.4.5 du cours) assure alors

$$\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \deg \gamma_0\,.$$

Il y a ici une contradiction car $\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = 0$ (voir la question **I.4**) tandis que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \deg \gamma_0 \neq 0$ (voir la question **I.3**). La contradiction réside dans l'hypothèse consistant à supposer que $f(0)$ était à la frontière de $f(\overline{D(0,1)})$. Le point $f(0)$ est donc intérieur à $f(\overline{D(0,1)})$.

I.6 *Montrer que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si f est une application injective continue de U dans $\mathbb{C}$, $f(U)$ est un ouvert.*

Si z_0 est un point de U, il existe un disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ contenant z_0 et inclus dans U. En appliquant ce qui précède (de **I.1** à **I.5**) à la fonction

$$\zeta \in \overline{D(0,1)} \mapsto f(z_0 + r\zeta)$$

(qui est bien une fonction injective et continue de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$), on voit que $f(z_0)$ est intérieur à $f(\overline{D(z_0, r)})$, donc intérieur à $f(U)$. Ceci montre que $f(U)$ est voisinage de tous ses points, et est donc ouvert.

Problème II (de Cauchy Pompeïu à l'identité algébrique de Bézout).
Soient $p_1, ..., p_m$ m polynômes de n variables sans zéros communs dans $\mathbb{C}$, avec $d = \max(\deg p_j) > 0$.

II.1 *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction*

$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^{m} |p_j(\zeta)|^2}\Big) \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$

se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Calculer $Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1$.

Si z est fixé et $j \in \{1, ..., m\}$, la singularité en $\zeta = z$ de la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \longmapsto \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z} \qquad (*)$$

est éliminable puisque l'on a, pour tout entier $k \geq 1$, les identités remarquables

$$\zeta^k - z^k = (\zeta - z) \times \sum_{l=0}^{k-1} \zeta^{k-1-l} z^l.$$

Il suffit ensuite d'exploiter le fait que p_j est une somme de monômes. Chaque fonction (*), z étant fixé, se prolonge donc en une fonction entière (en fait un polynôme de degré $\deg p_j - 1$ dont les coefficients sont eux mêmes polynomiaux en le paramètre z). D'autre part, pour $j = 1, ..., m$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^{m} |p_j(\zeta)|^2} = \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^{m} |p_l(\zeta)|^2}$$

est C^∞ puisque son dénominateur ne s'annule pas et que l'on compose des fonctions holomorphes ou antiholomorphes (ici en l'occurrence des fonctions polynomiales de la variable complexe et leurs conjuguées) qui sont donc C^∞.
Le calcul demandé donne

$$\begin{aligned} Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1 &= 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{p_j(\zeta)}(p_j(z) - p_j(\zeta))}{\sum_{l=1}^{m} |p_l(\zeta)|^2} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^{m} |p_l(\zeta)|^2}\Big) p_j(z). \end{aligned}$$

II.2 *Soit $R > 0$ et z un point du disque ouvert $D(0, R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) la fonction*

$$\zeta \in D(0, R) \longmapsto (Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1)^2.$$

Si φ est une fonction de classe C^1 au voisinage du disque fermé $\overline{D(0, R)}$, la formule intégrale de Cauchy-Pompeïu (Proposition I.2.1 du cours) donne (si les coordonnées réelles de la variable complexe muette ζ sous les intégrales sont notées ξ et η, i.e

$\zeta = \xi + i\eta$)

$$\begin{aligned}\forall\, z \in D(0,R),\ \varphi(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{D(0,R)}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z}\\ &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\gamma_R}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \iint_{D(0,R)}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z}\Big)\\ &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\gamma_R}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \iint_{D(0,R)}\frac{\overline{\partial}\,\varphi(\zeta)\wedge d\zeta}{\zeta - z}\Big).\end{aligned}$$

si l'on convient de noter

$$\overline{\partial}\varphi(\zeta) := \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,d\overline{\zeta}$$

et γ_R le lacet continu $t \in [0,2\pi] \mapsto Re^{it}$. On applique ici cette formule à la fonction

$$\zeta \longmapsto (Q_z(\zeta)(\zeta - z) + 1)^2 = \varphi_z(\zeta)$$

(z étant un point de $D(0,R)$). La règle de Leibniz et le fait que $\zeta \mapsto \zeta - z$ soit holomorphe nous donnent après calcul

$$\begin{aligned}&\overline{\partial}_\zeta\varphi_z(\zeta) = 2[Q_z(\zeta)(\zeta - z) + 1] \times (\zeta - z)\overline{\partial}_\zeta[Q_z(\zeta)]\\ =\ & 2(\zeta - z)\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m\Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2}\Big)\,\frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z}\,\overline{\partial}_\zeta\Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2}\Big)\,p_j(z).\end{aligned}$$

Comme

$$\Big[Q_z(\zeta)(\zeta - z) + 1\Big]_{\zeta = z} = 1,$$

la formule de Cauchy-Pompeïu, appliquée à la fonction φ_z, donne donc au point z (en notant pour simplifier $\|p(\zeta)\|^2 := \sum_{l=1}^m |p_j(\zeta)|^2$) :

$$\begin{aligned}1 = &\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m\Big(\int_{\gamma_R}\frac{\overline{p_j(\zeta)}\ \overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^4}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big)\,p_j(z)p_k(z)\\ &+\frac{i}{\pi}\sum_{j=1}^m\Big(\sum_{k=1}^m\iint_{D(0,R)}\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2}\,\frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z}\,\overline{\partial}_\zeta\Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2}\Big)\wedge d\zeta\Big)\,p_j(z).\end{aligned}$$

II.3 *En fixant z et en faisant tendre R vers l'infini dans la formule établie à la question* **II 2)***, construire m polynômes $q_1, ..., q_m$ à coefficients complexes tels que*

$$1 = \sum_{j=1}^m p_j(z)q_j(z)\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Quelle autre méthode (algébrique cette fois) permet aussi de calculer de tels polynômes q_j ?

Pour $1 \leq j,k \leq m$, on a

$$\Big|\frac{\overline{p_j(\zeta)}\ \overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^4}\Big| \leq \frac{1}{\|p(\zeta)\|^2} \leq \frac{\gamma}{|z|^{2d}}\ \text{pour}\ |z| >> 1$$

et une certaine constante positive γ. Il résulte de ces estimations que si z est fixé et si $R > |z|$ tend vers l'infini, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\overline{p_j(\zeta)}\,\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^4} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

puisque cette intégrale est majorée en module par $2\pi R \times (\gamma R^{-2d}) \times 1/(R - |z|)$ et que $2d > 0$. Il en résulte donc que l'on déduit de la formule de représentation établie au **II.2** l'identité :

$$1 = \frac{i}{\pi} \times$$
$$\lim_{R\to+\infty} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} \iint_{D(0,R)} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \Big) \wedge d\zeta \Big) p_j(z).$$

Lorsque z est fixé, le terme sous chacune des intégrales figurant au second membre de cette formule est C^∞ (comme fonction de ζ) et majoré en module pour $|\zeta\| >> 1$ par

$$\frac{\gamma}{|\zeta|^d} \times C(z)|\zeta|^{d-1} \times \frac{\gamma'}{|\zeta|^{d+1}} \le \frac{\tilde{C}(z)}{|\zeta|^{d+2}}.$$

Comme $d + 2 \ge 3 > 2$, il résulte du critère de Riemann la convergence sur $\mathbb{C}$ (au sens de Lebesgue) de toutes les intégrales doubles figurant au second membre de l'égalité ci dessus. On déduit donc du théorème de convergence dominée de Lebesgue l'identité :

$$1 = \frac{i}{\pi} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \Big) \wedge d\zeta \Big) p_j(z).$$

On reconnait en chaque fonction

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \sum_{k=1}^{m} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \Big) \wedge d\zeta$$

une fonction polynomiale q_j en la variable z, de degré d'ailleurs majoré par $d - 1$. L'identité obtenue est donc bien de la forme

$$1 = \sum_{j=1}^{m} q_j(z) p_j(z)$$

requise.
L'autre procédé (algébrique celui là) pour récupérer une identité de cette forme est l'algorithme d'*Euclide étendu* appliqué à p_1 et à une combinaison linéaire de $p_1, p_2, ..., p_m$ (il en existe car $p_1, ..., p_m$ sont supposés n'avoir aucun zéro commun) qui ne s'annule en aucun zéro de p_1.

Problème III (vers les fonctions holomorphes en deux variables).

Soit f une fonction continue dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$, telle que pour tout w dans $\overline{D(0,1)}$, la fonction $f_w : z \longmapsto f(z,w)$ soit holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$ et que, pour tout z dans $D(0,1)$, la fonction $f^z : w \mapsto f(z,w)$ soit holomorphe dans le disque $D(0,1)$.

III.1 *Montrer que f se représente dans $D(0,1)\times D(0,1)$ sous la forme*

$$f(z,w)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2}\frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z)(e^{i\varphi}-w)}\,d\theta\,d\varphi \quad \forall\,(z,w)\in D(0,1)\times D(0,1)$$

et en déduire[3] *que, si $(z_0,w_0)\in D(0,1)\times D(0,1)$, f se développe dans le produit de disques ouverts $D(z_0,1-|z_0|)\times D(0,1-|w_0|)$ sous la forme*

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{z_0,w_0,k,l}(z-z_0)^k(w-w_0)^l\,,$$

où les coefficients $a_{z_0,w_0,k,l}$ (que l'on explicitera sous forme d'intégrales) sont tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|a_{z_0,w_0,k,l}|r^ks^l<\infty \qquad \forall\,r\in[0,1-|z_0|[,\ \forall\,s\in[0,1-|w_0|[.$$

On note $\gamma\,:t\in[0,2\pi]\mapsto e^{it}$. Si $(z,w)\in D(0,1)\times D(0,1)$, il résulte de l'holomorphie de f^z dans $D(0,1)$ et de la continuité de f dans $\overline{D(0,1)}$ que l'on a la formule de représentation de Cauchy (Corollaire 3 du Théorème II.1.3 du cours)

$$f(z,w)=f^z(w)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(z,u)}{u-w}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z,e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi.$$

On utilise ensuite le fait que f_u est holomorphe pour tout u dans $\overline{D(0,1)}$ (en particulier lorsque $|u|=1$) et l'on applique une fois de plus la formule de Cauchy, cette fois pour chaque $\zeta\mapsto f_u(\zeta)$ lorsque $|u|=1$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} f(z,w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z,e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\int_\gamma\frac{f(\zeta,e^{i\varphi})\,d\zeta}{\zeta-z}\Big]\,d\varphi\\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{e^{i\theta}-z}\,d\theta\Big]\frac{d\varphi}{e^{i\varphi}-w}\,. \end{aligned}$$

Puisque f est continue (donc bornée en module) dans $\overline{D(0,1)}\times\overline{D(0,1)}$ et que z,w sont tous deux de module strictement inférieur à 1, la fonction

$$(\theta,\varphi)\longmapsto\frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z)(e^{i\varphi}-w)}$$

est intégrable (car bornée en module) sur $[0,2\pi]^2$ et le théorème de Fubini permet de conclure à la formule

$$f(z,w)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2}\frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z)(e^{i\varphi}-w)}\,d\theta\,d\varphi \quad \forall\,(z,w)\in D(0,1)\times D(0,1) \quad (\star)$$

voulue.
À ce stade, on reprend pour obtenir le développement de f au voisinage d'un point (z_0,w_0) de $D(0,1)\times D(0,1)$ la preuve du Théorème II.1.3 du cours (implication

[3] On s'inspirera pour cela de la preuve du théorème II.1.3 du polycopié.

(1) $\Longrightarrow$ (2) de cet énoncé). On part pour cela de la formule de représentation ($\star$) réécrite :

$$f(z,w) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{\Big((e^{i\theta}-z_0)-(z-z_0)\Big)\Big((e^{i\varphi}-w_0)-(w-w_0)\Big)}\,d\theta d\varphi,$$

puis on développe en série de puissances de $z-z_0$ et $w-w_0$ (pourvu que $|z-z_0| < 1-|z_0|$ et $|w-w_0| < 1-|w_0|$ puisque ces bornes $1-|z_0|$ et $1-|w_0|$ représentent respectivement le minimum des fonctions $\theta \in [0,2\pi] \mapsto |e^{i\theta}-z_0|$ et $\varphi \in [0,2\pi] \mapsto |e^{i\varphi}-w_0|$)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Big((e^{i\theta}-z_0)-(z-z_0)\Big)\Big((e^{i\varphi}-w_0)-(w-w_0)\Big)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{z_0,w_0,k,l}(\theta,\varphi)(z-z_0)^k(w-w_0)^l\,, \end{aligned} \qquad (\star\star)$$

où

$$\alpha_{z_0,w_0,k,l}(\theta,\varphi) := \frac{1}{(e^{i\theta}-z_0)^{k+1}(e^{i\varphi}-w_0)^{l+1}}.$$

Notons que l'on a, pour tout $r \in [0,1-|z_0|[$, pour tout $s \in [0,1-|w_0|[$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \sup_{[0,2\pi]^2} |\alpha_{z_0,w_0,k,l}(\theta,\varphi)|\, r^k s^l = \\ &= \frac{1}{(1-|z_0|)(1-|w_0|)} \times \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{r}{1-|z_0|}\Big)^k \times \sum_{l=0}^{\infty}\Big(\frac{s}{1-|w_0|}\Big)^l \\ &= \frac{1}{(1-|z_0|-r)(1-|w_0|-s)} < +\infty. \end{aligned}$$

On peut donc insérer ce développement ($\star\star$) sous l'intégrale dans la formule de représentation ($\star$) pour obtenir, toujours sous les conditions $|z-z_0| < 1-|z_0|$ et $|w-w_0| < 1-|w_0|$, le développement

$$\begin{aligned} &f(z,w) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z_0)^{k+1}(e^{i\varphi}-w_0)^{l+1}}\,d\theta d\varphi\Big)\,(z_-z_0)^k(w-w_0)^l, \end{aligned} \qquad (\star\star\star)$$

qui fournit le résultat demandé, si l'on pose

$$a_{z_0,w_0,k,l} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z_0)^{k+1}(e^{i\varphi}-w_0)^{l+1}}\,d\theta d\varphi.$$

Notons que l'on a bien, si $0 \le r < 1-|z_0|$ et $0 \le s < 1-|w_0|$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |a_{z_0,w_0,k,l}| r^k s^l \le \frac{\sup_{[0,2\pi]^2}|f(e^{i\theta},e^{i\varphi})|}{(1-|z_0|-r)(1-|w_0|-s)} < +\infty.$$

III.2 *On suppose que f ne s'annule pas dans $\{|z|=1\} \times \overline{D(0,1)}$. Montrer que pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, f_w n'a qu'un nombre fini de zéros (chacun compté avec sa* *multiplicité) dans $D(0,1)$ et que ce nombre ne dépend pas de w. On l'appelle dans la suite p.*

Les zéros de la fonction f_w dans le disque unité sont par hypothèses tous inclus dans un disque $D(0,1-\epsilon)$ avec $\epsilon > 0$ puisque la fonction f est uniformément continue sur le compact $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$ et ne s'annule pas sur $\{|z|=1\} \times \overline{D(0,1)}$. On note $\gamma_{1-\epsilon}$ le lacet $t \in [0,2\pi] \mapsto (1-\epsilon)e^{it}$. Le nombre de zéros de f_w dans $D(0,1)$ (ou, ce qui revient au même, dans $D(0,1-\epsilon)$) est donc donné par le théorème de Rouché (Proposition II.3.5 du cours) :

$$N(f_w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{1-\epsilon}} \frac{f_w'(\zeta)}{f_w(\zeta)}\, d\zeta$$

et varie donc continuement en fonction du paramètre w (on peut aussi invoquer la Proposition II.3.6 en prenant pour K le disque $\overline{D(0,1-\epsilon)}$ et en raisonnant avec f_{w_0} et f_w pour w voisin de w_0). Comme $w \in \overline{D(0,1)} \mapsto N(f_w)$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est constante, égale à un entier $p \in \mathbb{N}$.

III.3 *Montrer*[4] *qu'il existe des fonctions $a_1, ..., a_p$ holomorphes dans $D(0,1)$, telles que, dans $D(0,1) \times D(0,1)$,*

$$f(z,w) = (z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z + a_p(w))g(z,w)\,,$$

où g est une fonction continue de $D(0,1) \times D(0,1)$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $w \in D(0,1)$, $z \mapsto g(z,w)$ soit une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ (et vice versa en échangeant z et w). Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ peuvent-ils être des points isolés ?

La k-ième somme de Newton des p racines $\zeta_j(w)$ de f_w vaut

$$S_k(w) = \sum_{j=1}^{p} \zeta_j^k(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{1-\epsilon}} \zeta^k \frac{f_w'(\zeta)}{f_w(\zeta)}\, d\zeta$$

d'après le Théorème des résidus (Proposition II.3.4 du cours). Le théorème de dérivation des intégrales fonctions d'un paramètre complexe [5] montre que l'intégrale à paramètres (en l'occurrence ici w) ci dessus est une fonction holomorphe de ce paramètre $w \in D(0,1)$. On dispose d'autre part des relations de Newton

$$(-1)^k \sigma_k(w) = \sum_{l=0}^{k-1} \sigma_l S_{k-l}(w),\ k = 1, ..., p,\ \sigma_0 = 0$$

pour exprimer les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_k(w)$, $k = 1, ..., p$, des $\zeta_j(w)$, $j = 1, ..., p$, comme des expressions polynômiales en les $S_k(w)$, donc aussi comme des fonctions holomorphes dans $D(0,1)$. Si l'on pose $a_k(w) = (-1)^j \sigma_k(w)$ pour $k = 1, ..., p$, on a

$$z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z + a_p(w) = \prod_{j=1}^{p} (\zeta - \zeta_j(w))$$

[4]On rappellera les relations de Newton reliant les sommes de Newton $S_1, ..., S_p$ de p nombres aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, ..., \sigma_p$ de ces mêmes p nombres.

[5]Voir par exemple le Théorème 3.4 dans le polycopié en ligne du cours de MHT512 : `http ://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf`

et l'on peut donc écrire, pour $w \in D(0,1)$,

$$f(z,w) = (z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z + a_p(w))g_w(z),$$

où g_w est une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ ne s'annulant pas dans ce disque. Si l'on pose $g_w(z) = g(z,w)$, il reste à vérifier que, pour tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \mapsto g(z,w)$ est encore holomorphe. Le principe du maximum appliqué à la fonction g_w dans $D(0,1)$ implique que pour tout $w \in D(0,1)$, pour tout $z \in D(0,1)$,

$$|g_w(z)| \leq \epsilon^{-p} \sup_{\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}} |f|$$

car $|\zeta - \zeta_j(w)| \geq \epsilon$ pour tout ζ de module 1 et tout w dans $D(0,1)$. La fonction

$$(z,w) \mapsto g(z,w)$$

est donc bornée dans $D(0,1) \times D(0,1)$. Si z_0 est tel que la fonction

$$w \mapsto z_0^p + a_1(w)z_0^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z_0 + a_p(w)$$

n'est pas identiquement nulle dans $D(0,1)$, alors la fonction

$$w \mapsto \frac{f(z,w)}{z_0^p + a_1(w)z_0^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z_0 + a_p(w)} = g(z_0,w)$$

est une fonction méromorphe dans $D(0,1)$ et bornée, donc de singularités éliminables ; c'est donc bien une fonction holomorphe de la variable w. Si maintenant exactement $1 \leq \nu \leq p$ des racines $\zeta_j(w)$ sont identiquement égales à z_0 pour tout $w \in D(0,1)$, on remarque que

$$\begin{aligned} & z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z + a_p(w) = \\ = \quad & (z-z_0)^\nu (z^{p-\nu} + \beta_1(w)z^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w)), \end{aligned}$$

où les fonctions β_j sont holomorphes dans $D(0,1)$ et la fonction

$$w \in D(0,1) \mapsto z_0^{p-\nu} + \beta_1(w)z_0^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w)$$

n'est pas identiquement nulle. D'après le développement local en série double ($\star\star\star$) établi en fin de question **III.1**, la fonction f s'exprime dans $D(0,1) \times D(0,1)$ sous la forme $f(z,w) = (z-z_0)^\nu \tilde{f}(z,w)$, où la fonction $\tilde{f}$ est telle que la fonction $\tilde{f}_{z_0}$: $w \mapsto \tilde{f}(z_0,w)$ est une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ non identiquement nulle dans $D(0,1)$, avec

$$\tilde{f}(z_0,z) = (z_0^{p-\nu} + \beta_1(w)z_0^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w))\, g(z_0,w).$$

La fonction

$$w \in D(0,1) \mapsto g(z_0,w) = \frac{\tilde{f}(z_0,z)}{z_0^{p-\nu} + \beta_1(w)z_0^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w)}$$

est donc encore une fonction méromorphe bornée dans $D(0,1)$, donc une fonction méromorphe à singularités éliminables (on se ramène donc ainsi au cas où $f(z_0,w) \not\equiv 0$ dans $D(0,1)$). Pour tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \in D(0,1) \mapsto g(z,w)$ est donc bien analytique dans $D(0,1)$.

Chapitre 12

Texte et corrigé du DM2 - 2010-2011

I. La formule de Jensen.

I.1. *Soit u une fonction harmonique dans la couronne ouverte du plan complexe $\{r_1 < |z| < r_2\}$, où $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$. En utilisant la première formule de Green (Proposition III.1.1 du cours), montrer que la fonction*

$$M_u \ : r \in]r_1, r_2[\longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta$$

est, sur $]r_1, r_2[$, de la forme $M_u(r) = a \log r + b$, où a et b sont deux constantes.

Si u est une fonction harmonique (donc C^∞) dans la couronne $\{r_1 < |z| < r_2\}$, la fonction

$$t \mapsto f(e^t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{t+i\theta})\, d\theta$$

est de classe C^1 dans $]\log r_1, \log r_2[$ et se différentie en utilisant le théorème (élémentaire ici) de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre. On a

$$\frac{d}{dt}[u(e^t \cos\theta, e^r \sin\theta)] = e^t \langle \nabla u(e^t \cos\theta, e^t \sin\theta), \nu_\theta \rangle\,,$$

où $\nu_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ est le vecteur $\nu_{\rm ext}$ au point

$$(e^t \cos\theta, e^t \sin\theta)$$

du bord du disque $D(0, e^t)$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(e^t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(e^t \cos\theta, e^t \sin\theta)\, e^t d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0,e^t)} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(y)\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

La première formule de Green (Proposition III.1.1), ou encore « formule de la divergence », implique que si $r_1 < e^{t'} < e^t < r_2$ on a

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D(0,e^t)} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial D(0,e^{t'})} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(y)\, d\sigma(y) \\ = &\int_{e^{t'}<|y|<e^t} \Delta u(y) d\lambda(y) = 0. \end{aligned}$$

La dérivée de $t \mapsto f(e^t)$ est donc constante, ce qui prouve que cette fonction est affine, ce qui équivaut à dire que $f(r) = a \log r + b$, a et b étant deux constantes.

I.2. *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, $R \in]0, \infty]$, et $\alpha_1, ..., \alpha_N, ...$ la liste de ses zéros dans cette couronne ouverte, rangés dans l'ordre des modules croissants :*

$$0 < |\alpha_1| \leq \cdots \leq |\alpha_N| \leq \cdots < R\,.$$

On suppose aussi que f présente une singularité au pire non essentielle (elle peut être éliminable) à l'origine. En utilisant le résultat établi à la question **I.1** *et le théorème de Rouché (Proposition II.3.5 du cours), montrer que si $0 < r_1 < r_2 \leq R$ sont tels que f ne s'annule pas dans la couronne ouverte $\{r_1 < |z| < r_2\}$, on a*

$$\forall r \in]r_1, r_2[\,,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta = (\nu_f(r_1) + \nu(f,0))\, \log r + \text{Constante},$$

où $\nu_f(r_1)$ désigne le nombre de zéros de f (comptés avec leurs multiplicités) dans la couronne semi-fermée $\{0 < |z| \leq r_1\}$ et $\nu(f,0)$ désigne l'indice du plus petit $k \in \mathbb{Z}$ tel que le coefficient de Laurent $a_k(f,0)$ soit non nul.

La fonction $z \mapsto \log |f(z)|$ est harmonique dans la couronne $\{r_1 < |z| < r_2\}$ puisque f est holomorphe et ne s'annule pas dans cette couronne, ce qui implique que $\log |f|$ y est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe[1], donc est harmonique dans cette couronne. D'après le résultat établi au **I.1**, il existe deux constantes a_{r_1,r_2} et b_{r_1,r_2} telles que

$$\forall r \in]r_1, r_2[\,,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta = a_{r_1,r_2}\, \log r + b_{r_1,r_2}.$$

Or on a, si $\gamma_r : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto re^{i\theta}$, $r \in]r_1, r_2[$,

$$a_{r_1,r_2} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\Big[\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta}\, d\theta\Big] = \mathrm{Re}\,\Big[\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta\Big]$$

car

$$d \log |f| = \frac{1}{2}\Big(\frac{f'(z)}{f(z)} dz + \overline{\frac{f'(z)}{f(z)}}\, d\overline{z}\Big)$$

et donc, pour $t \in]\log r_1, \log r_2[$,

$$d_t \log |f(e^{t+i\theta})| = e^t \mathrm{Re}\Big(\frac{f'(e^{t+i\theta})}{f(e^{t+i\theta})} e^{i\theta}\Big)\, dt.$$

Le théorème de Rouché (Proposition II.3.5 du cours), appliqué à la fonction méromorphe f dans le disque $D(0, r)$ dont le seul pôle est 0 (avec ordre $|\nu(f,0)|$) et zéros tous dans la couronne $\{0 < |z| \leq r_1\}$ lorsque $r \in]r_1, r_2[$, assure que, si $r \in]r_1, r_2[$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \nu(f,0) + \nu_f(r_1),$$

[1] Une fonction holomorphe et ne s'annulant pas dans un disque (ou plus généralement un ouvert simplement connexe du plan) s'écrit dans ce disque comme l'exponentielle d'une fonction holomorphe, donc le logarithme de son module est (toujours dans ce disque) la partie réelle d'une fonction holomorphe. On aurait pu aussi faire un calcul direct en remarquant que $2(\partial/\partial z) \log[f(z)\overline{f(z)}] = \overline{f'(z)}/\overline{f(z)}$ et donc que $\Delta[\log |f(z)|^2] = 2\Delta[\log |f(z)|] = 2(\partial/\partial z)[\overline{f'(z)}/\overline{f(z)}] = 0$.

d'où la formule demandée.

I.3. *En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, montrer que, si α est un nombre complexe non nul, la fonction*

$$I_\alpha \ : r \in]0,\infty[\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta}-\alpha|\, d\theta$$

est une fonction continue de r. En utilisant la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques (Théorème III.2.1 du cours), montrer que $I_\alpha(r) = \log|\alpha|$ si $r < \alpha$ et en déduire la valeur de $I_\alpha(|\alpha|)$.

Si $r > |\alpha|$, la fonction $z \mapsto z-\alpha$ ne s'annule pas dans la couronne $\{|z| > r\}$. D'après le résultat établi à la question **I.2**, on a donc

$$\forall\, r > |\alpha|, \quad I_\alpha(r) = \log r + \text{Constante}.$$

D'autre part, pour, si $r < |\alpha|$, la fonction $z \mapsto \log|z-\alpha|$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe ne s'annulant pas (en l'occurrence la fonction $z \mapsto z-\alpha$) dans $D(0,r')$ lorsque $r < r' < |\alpha|$. La formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques assure donc que, pour $r < |\alpha|$, on a

$$I_\alpha(r) = (\log|z-\alpha|)_{z=0} = \log|\alpha|.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que la fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est bien définie en $r = |\alpha|$ et se trouve être, ainsi prolongée, une fonction continue sur $]0,\infty[$. On en déduira que la fonction I_α est la fonction affine par morceaux de $r \mapsto \log r$ définie sur $]0,\infty[$ par

$$I_\alpha(r) = \log|\alpha| \quad \forall\, r \in]0,|\alpha|] \quad \& \quad I_\alpha(r) = \log r \quad \forall\, r \in]|\alpha|,+\infty[.$$

En particulier $I_\alpha(|\alpha|) = \log|\alpha|$.

Reste à prouver la continuité de I_α ainsi prolongée en $r = |\alpha|$. Si $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_0}$ et $r = |\alpha|$, la fonction

$$\theta \mapsto |\log|re^{i\theta}-\alpha|| = \Big|\log|r(e^{i\theta}-e^{i\theta_0})|\Big| = \Big|\log|\alpha| + \log|e^{i(\theta-\theta_0)}-1|\Big|$$

est équivalente à $\theta \mapsto |\log|\theta-\theta_0||$ au voisinage de $\theta = \theta_0$. Cette fonction est intégrable au voisinage de $\theta = \theta_0$ (qui est le seul point de $[0,2\pi]$ posant problème au niveau de l'intégrabilité). L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \Big|\log|re^{i\theta}-\alpha|\Big| d\theta$$

est donc bien convergente et la fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est bien définie pour $r = |\alpha|$, donc en fait pour tout $r \in]0,+\infty[$. Pour $|r-|\alpha|| < |\alpha|/2$ et $|\theta-\theta_0| \leq \eta << 1$, on a (par le théorème des obliques inégales)

$$|re^{i\theta}-\alpha| \geq r|\sin(\theta-\theta_0)| \geq \frac{r}{2}|\theta-\theta_0| \geq \frac{|\alpha|}{4}|\theta-\theta_0|.$$

Or

$$\theta \mapsto \Big|\log|\theta-\theta_0|\Big|$$

est intégrable sur $]\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta[$. Comme on peut majorer

$$(r, \theta) \mapsto \Big| \log |re^{i\theta} - \alpha| \Big|$$

par une constante sur

$$\Big\{ (r, \theta) \; ; \; |r - |\alpha|| < |\alpha|/2 \, , \, |\theta - \theta_0| > \eta \text{ modulo } 2\pi \Big\} ,$$

on en déduit l'existence d'une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$, majorant sur $[0, 2\pi]$ les fonctions

$$\theta \mapsto \Big| \log |re^{i\theta} - \alpha| \Big|$$

pour tout r tel que $|r - |\alpha|| < |\alpha|/2$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \log |r_n e^{i\theta} - \alpha| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log \Big| |\alpha| e^{i\theta} - \alpha \Big| \, d\theta$$

si $(r_n)_n$ est une suite tendant vers $|\alpha|$. La fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est donc bien continue en $|\alpha|$.

I.4. *On reprend la fonction f introduite à la question* **I.2**. *Déduire de* **I.2** *et* **I.3** *que la fonction*

$$r \in]0, R[\longmapsto M_{\log |f|}(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

s'exprime sous la forme

$$\forall \, r \in]0, R[, \;\; M_{\log |f|}(r) = \nu(f, 0) \log r + \log |a_{\nu(f,0)}(f, 0)| + \int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t} \, dt \, , \qquad (\dagger)$$

où ϵ désigne un réel quelconque de $]0, |\alpha_1|[$. Vérifier en utilisant le procédé sommatoire d'Abel (c'est-à-dire la formule d'intégration par parties discrète) que l'identité $(\dagger)$ *se reformule aussi :*

$$\forall \, r \in]0, R[, \;\; M_{\log |f|}(r) = \log \Big(|a_{\nu(f,0)}(f, 0)| \, r^{\nu(f,0)} \prod_{j=1}^{\nu_f(r)} \frac{r}{|\alpha_j|} \Big). \qquad (\dagger\dagger)$$

Dans le disque ouvert $D(0, |\alpha_1|)$, la fonction méromorphe f (avec comme seul pôle $z = 0$) se factorise sous la forme

$$f(z) = a_{\nu(f,0)}(f, 0) \, (z - z_0)^{\nu(f,0)} \times h(z),$$

où h est une fonction holomorphe dans $D(0, |\alpha_1|)$, ne s'annulant pas dans ce disque, et telle que $h(0) = 1$; cela résulte du fait que f admette dans la couronne $\{0 < |z| < |\alpha_1|\}$ un développement en série de Laurent convergent

$$f(z) = \sum_{k=\nu(f,0)}^{\infty} a_k z^k$$

(Proposition II.3.1 du cours). On en déduit donc que, pour $r \in]0, |\alpha_1|[$,

$$\begin{aligned} M_{\log|\mathrm{f}|}(r) &= \log |a_{\nu(f,0)}(f,0)| + \nu(f,0)\log r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |h(re^{i\theta}|\, d\theta \\ &= \log |a_{\nu(f,0)(f,0)}| + \nu(f,0)\log r + \log |h(0)| \\ &= \log |a_{\nu(f,0)}(f,0)| + \nu(f,0)\log r \end{aligned}$$

puisque la fonction $z \mapsto \log|h(z)|$ est harmonique dans $D(0,|\alpha_1|)$ et vérifie donc la propriété de la moyenne. Ceci correspond à la formule (†) dans le cas où $r < |\alpha_1|$. Notons $\alpha_{1,1},...,\alpha_{1,M_1}$ les zéros de f (comptés avec leurs multiplicités) de module exactement $|\alpha_1|$. La fonction h se factorise au voisinage de $\overline{D(0,|\alpha_1|)}$ sous la forme

$$h(z) = \prod_{j=1}^{M_1}(z-\alpha_{1,j}) \times \widetilde{h}(z)$$

où $\widetilde{h}$ est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de $\overline{D(0,|\alpha_1|)}$ et il résulte du résultat établi à la question **I.3** que la fonction

$$r \longmapsto M_{\log|h|}(r) = \sum_{j=1}^{M_1} I_{\alpha_{1,j}}(r) + M_{\log|\widetilde{h}|}(r)$$

est continue au voisinage de $r = |\alpha_1|$. La fonction

$$r \longmapsto M_{\log|f|}(r) = \log|a_{\nu(f,0)}(f,0)| + \nu(f,0)\log r + M_{\log|h|}(r)$$

est donc bien continue sur $]0,|\alpha_1|]$ et la formule

$$M_{\log|f|}(r) = \log|a_{\nu(f,0)}(f,0)| + \nu(f,0)\log r$$

est donc bien valide sur $]R_0,R_1]$ (et même au voisinage). Supposons (†) valide dans $]R_k,R_{k+1}]$ et la fonction $M_{\log|f|}$ continue au voisinage de R_{k+1}. Sur $]R_{k+1},R_{k+2}[$, on sait (d'après le résultat établi à la question **I.2**) que

$$M_{\log|f|}(r) \;=\; (\nu_f(R_{k+1}) + \nu(f,0))\,\log r + C_{k+1}, \tag{12.1}$$

où C_{k+1} est une certaine constante. Pour déterminer cette constante, on utilise le fait que la fonction $M_{\log|f|}$ est continue en R_{k+1} et que (†) est valide pour $r \in]R_k,R_{k+1}]$ pour affirmer (en comparant les limites à gauche et à droite de $M_{\log|f|}$ en R_{k+1}) que

$$\begin{aligned} &(\nu_f(R_{k+1}) + \nu(f,0))\,\log R_{k+1} + C_{k+1} \\ =\;& \nu(f,0)\,\log R_{k+1} + \log|a_{\nu(f,0)}| + \int_\epsilon^{R_{k+1}} \frac{\nu_f(t)}{t}\,dt. \end{aligned} \tag{12.2}$$

En reportant (12.2) dans (12.1), on trouve, pour $r \in]R_{k+1},R_{k+2}[$,

$$\begin{aligned} M_{\log|f|}(r) &= \log|a_{\nu(f,0)}| + \nu(f,0)\log r + \int_\epsilon^{R_{k+1}} \frac{\nu_f(t)}{t}\,dt \\ &\qquad + \nu_f(R_{k+1})(\log r - \log R_{k+1}) \\ &= \log|a_{\nu(f,0)}| + \nu(f,0)\log r + \int_\epsilon^{R_{k+1}} \frac{\nu_f(t)}{t}\,dt \\ &\qquad + \nu_f(R_{k+1}) \int_{R_{k+1}}^r \frac{dt}{t} \\ &= \log|a_{\nu(f,0)}| + \nu(f,0)\log r + \int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t}\,dt \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles. Comme dans le cas $k=0$, on vérifie, en introduisant les zéros de f $\alpha_{k+2,j}$, $j=1,...,M_{k+2}$ de module R_{k+2} que la fonction

$$r \mapsto M_{\log|f|}(r)$$

est continue en R_{k+2} ; en effet, f s'exprime dans la couronne $\{R_{k+1}<|z|\leq R_{k+2}\}$ sous la forme

$$f(z)=\prod_{j=1}^{M_{k+2}}(z-\alpha_{k+2,j})\times h_{k+1}(z),$$

où h_{k+1} est une fonction holomorphe et sans zéros au voisinage de la couronne $\{R_{k+1}<|z|\leq R_{k+2}\}$, ce qui permet d'écrire, pour $R_{k+1}<|z|\leq R_{k+2}$,

$$M_{\log|f|}(z)=\sum_{j=1}^{M_{k+2}} I_{\alpha_{k+2,j}}(r)+M_{\log|h_{k+1}|}(r),$$

et de conclure à la continuité de cette fonction en $r=R_k$ en utilisant les résultats des questions **I.1** et **I.3**. La formule (†) est aussi valide en $r=R_{k+1}$ par continuité. La formule (†) est ainsi démontrée par récurrence.

Lorsque $r\in[R_k,R_{k+1}[$ et $k\geq 1$, le procédé d'Abel permet de ré-exprimer l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t}\,dt &= \int_\epsilon^{R_1}\frac{\nu_f(t)}{t}\,dt+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{R_j}^{R_{j+1}}\frac{\nu_f(t)}{t}\,dt+\int_{R_k}^r\frac{\nu_f(t)}{t}\,dt\\
&= \sum_{j=1}^{k-1}\nu_f(R_j)\,(\log R_{j+1}-\log R_j)+\nu_f(R_k)(\log r-\log R_k)\\
&= \nu_f(r)\log r-\sum_{j=1}^{k}(\nu_f(R_j)-\nu_f(R_{j-1}))\log R_j\\
&= \nu_f(r)\log r-\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{l=1}^{M_j}\log|\alpha_{j,l}|\Big)=\nu_f(r)\log r-\sum_{j=1}^{\nu_f(R_k)}\log|\alpha_j|\\
&= \nu_f(r)\log r-\sum_{j=1}^{\nu_f(r)}\log|\alpha_j|=\log\Big(\prod_{j=1}^{\nu_f(r)}\frac{r}{|\alpha_j|}\Big).
\end{aligned}\tag{12.3}$$

La même identité vaut lorsque $k=1$. Lorsque $k=0$, on a bien sûr, pour tout $r\in]R_0,R_1[=]0,R_1[$,

$$\int_\epsilon^r\frac{\nu_f(t)}{t}\,dt=0.\tag{12.4}$$

En ajoutant aux formules (12.3) (si $k\geq 1$) ou (12.4) (sur $]0,R_1[$) ainsi obtenues

$$\log(|a_{\nu(f,0)}(f,0)|\,r^{\nu(f,0)})$$

on transforme bien la relation (†) sur $[R_k,R_{k+1}[$, $k\geq 1$ en la relation (††). La même chose vaut sur $]R_0,R_1[=]0,R_1[$ et la formule (††) est ainsi bien démontrée pour $r\in]0,R_1[\cup\bigcup_{k\geq 1}[R_k,R_{k+1}[=]0,R[$ (s'il n'y a qu'un nombre fini de zéros pour f, on convient de poser, une fois tous les zéros épuisés, $R_{k+1}=R$).

I.5. *Si $P = a_0X^N + \cdots + a_{N-1}X + a_N$ est un polynôme à coefficients complexes de degré exactement N non nul en 0, de racines complexes $\xi_1, ..., \xi_N$ (comptées avec leurs multiplicités), déduire de la formule (††) établie au* **I.4** *que*

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|d\theta\right] = |a_0|\prod_{j=1}^{N} \max(|\xi_j|, 1).$$

Montrer que, si P est de plus à coefficients entiers, la mesure de Mahler de P définie par

$$h(P) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|d\theta$$

est un nombre positif ou nul ; en déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ se factorise sous la forme $P = P_1P_2$, où $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$, $h(P) \geq \max(h(P_1), h(P_2))$.

Comme P est non nul en zéro, la formule (††), appliquée dans $\mathbb{C}$ et exponentiée, montre que, si $\xi_1, ..., \xi_M$ sont les zéros de P (comptés avec leurs multiplicités) dans le disque fermé $\overline{D(0,1)}$

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|d\theta\right] = |P(0)|\prod_{j=1}^{M} \frac{1}{|\xi_j|} = |a_N|\prod_{j=1}^{M} \frac{1}{|\xi_j|}$$

$$= \quad |a_0| \prod_{j=M+1}^{N} |\xi_j| = |a_0|\prod_{j=1}^{N} \max(|\xi_j|, 1) \tag{12.5}$$

car $\prod_{j=1}^{N} |\xi_j| = |a_N|/|a_0|$.
Si P est à coefficients entiers, on a $|a_0| \geq 1$ et par conséquent $\exp(h(P)) \geq 1$ d'après l'égalité (12.5). On a donc $h(P) \geq 0$. Si P se factorise en $P = P_1P_2$, avec P_1 et P_2 à coefficients entiers, on a $h(P_1) \geq 0$ et $h(P_2) \geq 0$. Comme

$$h(P) = h(P_1P_2) = h(P_1) + h(P_2)$$

du fait que log transforme produit en somme, on a bien

$$\max(h(P_1), h(P_2)) \leq h(P).$$

II. La formule de Poisson-Jensen.

II.1. *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, présentant une singularité éliminable ou non essentielle en $z = 0$ ($\nu(f,0) \in \mathbb{Z}$ désignant l'indice du premier des coefficients de Laurent $a_k(f,0)$ non nuls. On note toujours $\alpha_1, ..., \alpha_N, ...$ la liste des zéros de f dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, ordonnés suivant les modules croissants et comptés avec leurs multiplicités. Pour chaque $r \in]0, R[$, on note $\nu_f(r^-)$ le nombre de zéros de f dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$. Vérifier que la fonction f se factorise dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$ sous la forme*

$$f(z) = z^{\nu(f,0)} g_r(z) \prod_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \frac{r(z - \alpha_j)}{r^2 - \overline{\alpha}_j z}\,,$$

où g_r est une fonction holomorphe dans $D(0,r)$ et ne s'annulant pas dans ce disque.

Le principe des zéros isolés (qui implique la non existence de points d'accumulation pour l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe et non identiquement nulle f dans $\overline{D(0,r)}$ lorsque $0<r<R$) implique que $\nu_f(r^-)$ est fini. La fonction polynomiale

$$\tilde{f}_r \ : z \in D(0,r) \setminus \{0\} \mapsto \prod_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \frac{r(z-\alpha_j)}{r^2 - \overline{\alpha}_j z}$$

s'annule dans la couronne $\{0<|z|<r\}$ exactement aux mêmes points que f, avec les mêmes multiplicités. La fonction

$$f_r : z \in D(0,r) \mapsto z^{\nu(f,0)} \tilde{f}_r(z)$$

est donc une fonction méromorphe dans $D(0,R)$ avec un seul pôle éventuel ($z=0$) tel que $\nu(f_r,0) = \nu(f,0)$ et mêmes zéros que f (les multiplicités étant prises en compte) dans la couronne $\{0<|z|<r\}$. Il en résulte que

$$f(z) = f_r(z) \times g_r(z),$$

où g_r est une fonction holomorphe dans $D(0,r)$ et ne s'annulant pas dans ce disque ouvert.

II.2. *Montrer que, pour $r \in]0,R[$, il existe une fonction h_r holomorphe dans $D(0,r)$ et telle que $g_r = \exp(h_r)$ dans $D(0,r)$. En utilisant la formule de représentation de Poisson (Proposition III.4.1 du cours), montrer que*

$$\forall\, r' \in]0,r[,\ \forall\, z \in D(0,r')\,,\ \log|g_r(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r')^2-|z|^2}{|r'e^{i\theta}-z|^2} \log|g_r(r'e^{i\theta})|\, d\theta.$$

La fonction g_r étant une fonction holomorphe et sans zéro dans le disque ouvert $D(0,r)$ (qui est un ouvert U étoilé, donc simplement connexe), il existe[2] une fonction h_r, holomorphe dans $D(0,r)$, telle que $g_r(z) = \exp(h_r(z))$ dans $D(0,r)$. La formule de Poisson (Proposition III.4.1 du cours) permet de représenter la fonction harmonique $\mathrm{Re}\, h_r = \log|g_r|$ dans le disque $D(0,r')$ lorsque $r'<r$, *i.e.* $\overline{D(0,r')} \subset D(0,r)$. La formule de représentation obtenue est exactement la formule demandée (intégrer sur $[-\pi,\pi]$ ou $[0,2\pi]$ est indifférent car la fonction de θ sous l'intégrale est 2π-périodique).

II.3. *Déduire de* **II.1** *et de* **II.2** *la formule de représentation de Poisson-Jensen :*

$$\begin{aligned}\forall\, r \in]0,R[,\ \forall\, z \in D(0,r)\setminus\{0\},\ f(z) \neq 0 \Longrightarrow \quad & \log|f(z)| = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta + \nu(f,0)\log\frac{|z|}{r} + & \sum_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \log\frac{|r(z-\alpha_j)|}{|r^2-\overline{\alpha}_j z|}\end{aligned}$$

(on établira tout d'abord cette formule lorsque r est tel que la fonction f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r, puis on approchera ensuite par valeurs inférieures le cas d'un r arbitraire dans $]0,R[$).

[2]Voir l'exercice 2.14, complété ici pour montrer que la fonction g que l'on y a construit est en fait holomorphe dans U lorsque f est holomorphe dans U.

On suppose dans un premier temps que f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r. Sur le bord de ce cercle, on voit que

$$\Big|\frac{r(z-\alpha_j)}{r^2-\overline{\alpha_j}z}\Big| = 1\,,\ \forall\, j=1,...,\nu_f(r^-) \tag{12.6}$$

car

$$|r(re^{i\theta}-\alpha_j)| = |r^2 - r\alpha_j e^{-i\theta}| = |r^2-\overline{\alpha_j}re^{i\theta}| \quad \forall\,\theta\in[0,2\pi].$$

On a donc, en utilisant la factorisation de f établie à la question **II.1** (pour z sur le cercle de rayon r) et les relations (12.6) (passées au logarithme et intégrées sur $[0,2\pi]$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \\ = \;& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|g_r(re^{i\theta})|\,d\theta + \nu(f,0)\log r. \end{aligned}$$

En combinant avec le résultat établi à la question **II.2**, on a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|g(z)| + \nu(f,0)\log r.$$

Comme

$$\log|f(z)| = \log|g_r(z)| + \nu(f,0)\,\log|z| + \sum_{j=1}^{\nu_f(r^-)}\log\frac{|r(z-\alpha_j)|}{|r^2-\overline{\alpha}_j z|}$$

pour tout $z\in D(0,r)$ tel que $f(z)\neq 0$, on en déduit la formule demandée lorsque f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r. Lorsque r est quelconque, on obtient la formule en remarquant que, pour tout $r\in]0,R[$, pour tout $z\in D(0,r)$, la fonction

$$r\mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$

est continue sur $[r,R[$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Chapitre 13

Texte et corrigé du DM3 - 2010-2011

Autour des théorèmes de Picard

Partie I

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans Ω, évitant les deux valeurs 0 et 1, et z_0 un point de Ω.

I.1. *Montrer qu'il existe une unique fonction g holomorphe dans Ω et telle que* $\mathrm{Re}\,(g(z_0) \in [-1/2, 1/2[$.

La fonction f est une fonction ne s'annulant pas dans l'ouvert simplement connexe Ω. On peut donc (voir l'exercice 2.14) trouver[1] une fonction g holomorphe dans Ω telle que $\exp(2i\pi g) \equiv f$ dans Ω. Deux telles fonctions g diffèrent d'un entier relatif, puisque leur différence est une fonction holomorphe dans Ω et que Ω est connexe (car simplement connexe). Il existe donc bien une unique fonction g holomorphe dans Ω et telle que $\exp(2i\pi g(z)) = f(z)$ si l'on impose la condition supplémentaire $\mathrm{Re}\,(g(z_0)) \in [1/2, 1/2[$.

I.2. *Montrer que la fonction $z \in \Omega \mapsto (g(z))^2 - 1$ ne s'annule pas dans Ω et en déduire l'existence d'une fonction G holomorphe dans Ω et telle que*

$$\forall z \in \Omega,\ (g(z) - G(z))(g(z) + G(z)) = 1.$$

Comme f évite aussi la valeur 1, la fonction g telle que $f \equiv \exp(2i\pi g)$ ne peut prendre une valeur dans $\mathbb{Z}$; elle ne saurait en particulier prendre les valeurs 1 ou -1. Il existe donc (puisque Ω est simplement connexe et pour les mêmes raisons qu'à la question **I.1**) une fonction u holomorphe dans Ω telle que $g^2 - 1 \equiv \exp(u)$ dans Ω. Si l'on pose $G = \exp(u/2)$, on a bien $g^2 - 1 \equiv G^2$, ou encore $(g - G)(g + G) \equiv 1$.

I.3. *Montrer que l'une des deux fonctions $g \pm G$ satisfait $|(g \pm G)(z_0)| \geq 1$. On note H cette fonction. Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe h dans Ω, telle que $H = \exp(h)$ et que* $\mathrm{Im}\,(h(z_0)) \in [-\pi, \pi[$.

Comme $(g(z_0) - G(z_0))(g(z_0) + G(z_0)) = 1$, l'un des deux nombres $|g(z_0) \pm G(z_0)|$ est de module supérieur ou égal à 1. La fonction $H = g \pm G$ ainsi définie ne s'annule

[1] Dans l'exercice 2.14, on avait trouvé une fonction continue g, mais l'on peut constater que la fonction construite est holomorphe lorsque f est holomorphe car elle se présente localement comme la composée de la fonction f avec une détermination holomorphe du logarithme.

pas dans Ω (puisque $(g-G)(g+G) \equiv 1$) et s'écrit donc (toujours puisque Ω est simplement connexe, et en invoquant l'argument utilisé à la question **I.1**) sous la forme $H = \exp(h)$. Deux fonction h satisfaisant cette relation diffèrent (puisque Ω est connexe) d'un multiple entier de $2i\pi$. Si l'on impose la condition supplémentaire $\operatorname{Im} h(z_0) \in [-\pi, \pi[$, la fonction h satisfaisant $\exp h \equiv H$ dans Ω est parfaitement déterminée et unique.

I.4. *Vérifier que, pour tout $z \in \Omega$, on a $f(z) = \exp(2i\pi \cosh(h(z))$, où la fonction cosinus hyperbolique* $\cosh$ *est définie par* $\cosh w := (e^w + e^{-w})/2$.

Il suffit de remarquer que $H + \frac{1}{H} = 2g$, donc, comme $H = \exp(h)$, $g \equiv \cosh h$ dans Ω. Ceci est à coupler avec l'identité $f \equiv \exp(2i\pi g)$ établie au **I.1**.

I.5. *Déduire de $H + \frac{1}{H} = 2g$ et de $|H(z_0)| \geq 1$ l'inégalité $|H(z_0)| \leq 1 + 2|g(z_0)|$. Montrer que $|\operatorname{Im}(g(z_0))| \leq (\log|f(z_0)|)/\pi$ et conclure que*

$$\begin{aligned} |h(z_0)| &\leq |\operatorname{Im} h(z_0)| + \log|H(z_0)| \\ &\leq \pi + \log|2g(z_0)| \\ &\leq \pi + \log\Big(2 + \frac{|\log|f(z_0)||}{\pi}\Big). \end{aligned} \tag{13.1}$$

On a $|H(z_0)| \leq 2|g(z_0)| + \frac{1}{|H(z_0)|} \leq 2|g(z_0)| + 1$. D'autre part $|\operatorname{Im} h(z_0)| \leq \pi$ et

$$|\operatorname{Re} h(z_0)| = |\log|H(z_0)|| = \log|H(z_0)| \leq \log(1 + 2|g(z_0)|).$$

On a enfin

$$2|g(z_0)| \leq 2|\operatorname{Re}(g(z_0))| + 2\frac{|\log(f(z_0))|}{2\pi} \leq 1 + \frac{|\log(f(z_0))|}{\pi}$$

puisque $-2\pi \operatorname{Im} g(z_0) = \log|f(z_0)|$ vu que $f(z_0) = \exp(2i\pi g(z_0))$. On a donc bien finalement

$$|h(z_0)| \leq |\operatorname{Re}(h(z_0))| + |\operatorname{Im}(h(z_0))| \leq \pi + \log\Big(2 + \frac{|\log|f(z_0)||}{\pi}\Big).$$

Partie II (un théorème de Bloch-Landau)

Nota : *cette partie est une reformulation des exercices 9.1 et 9.2 traités en TD ; seules les notations ont changé, par souçi de cohérence avec celles du problème.*

Soit Φ une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{D(0,1)}$ et telle que l'on ait $\Phi'(0) = 1$. On pose $M = \sup_{\overline{D(0,1)}} |\Phi(z)|$.

II.1. *Montrer que*

$$\varphi\ : t \in [0,1] \mapsto t \sup\{|\Phi'(z)|\,;\, |z| \leq 1-t\}$$

est continue sur $[0,1]$ et en déduire qu'il existe $t_0 > 0$ et $a \in D(0,1)$ avec $|a| \leq 1-t_0$, $|\Phi'(a)| = 1/t_0$ et $|\Phi'(z)| < 1/t$ pour $t < t_0$ et $|z| \leq 1-t$.

La fonction Φ' est uniformément continue sur $\overline{D(0,1)}$ (puisque Φ est holomorphe dans un voisinage de ce disque fermé). On en déduit que la fonction

$$t \in [0,1] \mapsto \sup\{|\Phi'(z)|\,;\, |z| \leq 1-t\}$$

(donc aussi son produit avec la fonction $t \mapsto t$) est continue en tout point t_0 de $[0,1]$. Si en effet $(t_k)_k$ est une suite de points tendant vers t_0, on a

$$\sup_{\overline{D(0,1-t_k)}} |\Phi'| \longrightarrow \sup_{\overline{D(0,1-t_0)}} |\Phi'|$$

lorsque k tend vers l'infini ; si ce n'était pas le cas, ou pourrait, quitte à extraire une sous suite, affirmer que, pour tout k,

$$\Big| \sup_{\overline{D(0,1-t_k)}} |\Phi'| - \sup_{\overline{D(0,1-t_0)}} |\Phi'| \Big| > \eta$$

pour un certain $\eta > 0$ alors que la suite $(t_k)_k$ tend vers t_0, ce qui contredirait l'uniforme continuité de Φ' sur $\overline{D(0,1)}$ (théorème de Heine).
On désigne par t_0 la borne inférieure de l'ensemble (non vide, car contenant 1) des $t \in [0,1]$ tels que

$$t \sup\{|\Phi'(z)|\,;\, |z| \leq 1-t\} = 1.$$

Vu la continuité de la fonction φ sur $[0,1]$ et le fait que $\varphi(0) = 1$, on a nécessairement $t_0 > 0$ et $\sup_{\overline{D(0,1-t_0)}} |\Phi'| = 1/t_0$. Il existe un point a de $\overline{D(0,1-t_0)} \subset D(0,1)$ tel que $|\Phi'(a)|$ réalise le maximum de la fonction continue $|\Phi'$ sur le compact $\overline{D(0,1-t_0)}$, soit $|\Phi'(a)| = 1/t_0$. Pour tout $t < t_0$, on a $\varphi(t) < 1$, i.e. $|\Phi'(z)| < 1/t$ pour tout $z \in \overline{D(0,1-t)}$.

II.2. *Montrer que $|\Phi'(z)| \leq 2/t_0$ dans le disque $D(a, t_0/2)$ et en déduire que la fonction Φ_a définie dans $D(0,1)$ par*

$$\Phi_a(z) = \Phi(z) - \Phi(a)$$

vérifie $|\Phi_a(z)| \leq 1$ dans $D(a, t_0/2)$.

On a $D(a,t_0/2) \subset \overline{D(0,1-t_0+t_0/2)} = \overline{D(0,1-t_0/2)}$. Comme $t_0/2 < t_0$, on a, d'après le résultat établi à la question **II.1.**, $|\Phi'(z)| < 2/t_0$ pour $z \in \overline{D(0,1-t_0/2)}$, *a fortiori* pour $z \in D(a,t_0/2)$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $z \in D(a,t_0/2)$,

$$|\Phi(z) - \Phi(a)| \leq \sup_{[a,z]} |\Phi'|\, |z-a| \leq \frac{2}{t_0} \times \frac{t_0}{2} = 1.$$

II.3. *Soit Ψ_a la fonction définie au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ par*

$$\Psi_a(z) = \frac{2\Phi_a\Big(a + \frac{t_0 z}{2}\Big)}{t_0 \Phi'(a)}.$$

Vérifier que $\Psi_a(0) = 0$, $\Psi'_a(0) = 1$ et $|\Psi_a(z)| \leq 2$ dans $D(0,1)$.

Comme $\Phi_a(a) = 0$, on a $\Psi_a(0) = 0$. De plus, par la règle de Leibniz, $\Psi'_a(0) = 1$. Enfin, du fait que $|\Phi'(a)| = 1/t_0$ et que $|\Phi_a| \leq 1$ dans $D(0,t_0/2)$, on a bien $\sup_{D(0,1)} |\Psi_a| \leq 2$.

II.4. *Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \Psi_a(D(0,1)$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction ψ_a holomorphe dans $D(0,1)$ telle que $\psi_a^2(z) = 1 - \Psi_a(z)/w$ pour tout z dans $D(0,1)$ et $\psi_a(0) = 1$. Donner les premiers termes du développement de ψ_a en série entière.*

Comme $w \notin \Psi_a(D(0,1)$, la fonction

$$z \in D(0,1) \mapsto 1 - \frac{\Psi_a(z)}{w}$$

ne s'annule pas dans l'ouvert (simplement connexe) $D(0,1)$ et vaut 1 en $z=0$, donc s'écrit sous la forme $\exp(\theta_a)$ avec $\theta_a(0) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (ce résultat a été utilisé plusieurs fois dans ce problème, voir par exemple la question **I.1**). On a donc le choix pour ψ_a entre les deux fonctions $\pm\exp(\theta_a/2)$; l'une de ces deux fonctions (et une seule) vaut 1 en $z=0$ (l'autre valant -1 en $z=0$). La fonction ψ_a est donc bien unique. Comme

$$\psi_a^2(z) = (1+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots)^2 = 1+2\alpha_1 z+\cdots = 1 - \frac{z+a_2z^2+\cdots}{w}$$

si $\Psi_a(z) = z+a_2z^2+\cdots$, on a par identification

$$\psi_a(z) = 1 - \frac{z}{2w} + \cdots$$

au voisinage de $z=0$.

II.5. *Montrer que*

$$\sup_{D(0,1)} |\psi_a|^2 \leq 1 + \frac{2}{|w|}$$

et déduire des inégalités de Cauchy (formulées à l'aide de la formule de Plancherel) que $|w| \geq 1/8$. *Conclure que* $\Psi_a(D(0,1))$ *contient le disque ouvert* $D(0,1/8)$ *et déduire de la relation entre* Φ *et* Ψ_a *que* $\Phi(D(0,1))$ *contient un disque ouvert de rayon au moins égal à* $1/16$.

Comme $\psi_a^2 = 1 - \Psi_a/w$ et que $|\Psi_a| \leq 2$ dans $D(0,1)$, on a

$$\sup_{D(0,1)} |\psi_a|^2 \leq 1 + \frac{2}{|w|}$$

(par l'inégalité triangulaire). D'après la formule de Plancherel (appliquée à la fonction 2π-périodique $\theta \mapsto \psi_a((1-\epsilon)e^{i\theta})$, $\epsilon \in]0,1[$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2(1-\epsilon)^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi_a((1-\epsilon)e^{i\theta})|^2\, d\theta \leq 1 + \frac{2}{|w|}.$$

On a donc en particulier

$$1+(1-\epsilon)|\alpha_1|^2 = 1+(1-\epsilon)\frac{1}{4|w|^2} \leq 1 + \frac{2}{|w|},$$

d'où $|w| \geq 1/8$ (on fait tendre ϵ vers 0). Il en résulte que le disque $D(0,1/8)$ est inclus dans $\Psi_a(D(0,1))$. Comme, pour tout $z \in D(0,1)$,

$$\Psi_a(z) = \frac{2\Phi_a\Big(a+\frac{t_0z}{2}\Big)}{t_0\Phi'(a)},$$

ce qui se lit aussi

$$\Phi\Big(a+\frac{t_0z}{2}\Big) = \Phi(a) + \frac{t_0\Phi'(a)}{2}\Psi_a(z),$$

et que $|t_0\Phi'(a)| = 1$, l'image $\Phi(D(0,1))$ contient un disque de centre $\Phi(a)$ et de rayon $1/2 \times 1/8 = 1/16$.

Partie III : vers les théorèmes de Picard

Soit F une fonction entière évitant deux valeurs a et b distinctes. Le but de cette partie est de montrer que F est constante. On suppose donc ici F non constante et le but de cette partie est d'aboutir à une contradiction.

III.1. *En utilisant les résultats établis dans la partie* **I**, *montrer qu'il existe une fonction entière h telle que*

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \frac{F(z)-a}{b-a} = \exp(2i\pi\cosh(h(z)).$$

Puisque F évite les valeurs distinctes a et b, la fonction $z \mapsto F(z) - a$ ne s'annule pas et évite la valeur $b - a \neq 0$. La fonction entière

$$f\ : z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{F(z)-a}{b-a}$$

ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1. D'après la partie **I** (question **I.4**), il existe une fonction entière h telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = \exp(2i\pi\cosh(h(z))).$$

III.2. Montrer que la fonction entière h de **III.1** évite toutes les valeurs

$$\pm\text{arcosh}\,(n+1) + ik\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},$$

ou arcosh $: [1,\infty[\to]0,\infty[$ est la fonction inverse de la fonction cosh.

Si u et v sont deux nombres réels, on a

$$\cosh(u+iv) = \cosh u\,\cos v + i\sinh(u)\,\sin v.$$

Si

$$u + iv = \pm\text{arcosh}\,(n+1) + ik\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},$$

on constate donc que $\cosh(u+iv) = \pm(n+1) \in \mathbb{Z}$. La fonction h ne saurait donc prendre de telles valeurs car $\cosh h$ ne peut prendre de valeurs entières (f ne prenant pas la valeur 1).

III.3. *Montrer que la suite*

$$\Big(\text{arcosh}\,(n+2) - \text{arcosh}\,(n+1)\Big)_{n\geq 0}$$

est une suite décroissante majorée par arcosh (2) $\simeq 1.317$. *En déduire que tout point du plan et à une distance au plus égale à*

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 + (\text{arcosh}\,2)^2} \simeq 3.22$$

de l'un des points $\pm\text{arcosh}\,(n+1) + ik\pi$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le fait que la fonction $t \mapsto [1,\infty[\mapsto \mathrm{arccosh}\, t$ soit concave et la formule des accroissements finis implique que la suite des taux d'accroissements successifs

$$\frac{\mathrm{arcosh}\,(n+2) - \mathrm{arcosh}\,(n+1)}{(n+2)-(n+1)} = \mathrm{arcosh}'(\xi_n)\,,\ \xi_n \in]n+1, n+2[,\ n \in \mathbb{N},$$

est une suite décroissante, majorée donc par son premier terme, arcosh (2). La valeur numérique approchée ($\simeq 1.317$) de arcosh(2) est donnée par une table. Tout point du plan se trouve dans un rectangle $[n, n+1] \times [k\pi, (k+1)\pi]$ ou $[-(n+1), -n] \times [k\pi, (k+1)\pi]$, où $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Il se trouve donc nécessairement à une distance inférieure à la longueur de la diagonale de ce rectangle de l'un des sommets de ce même rectangle. La longueur de la diagonale du rectangle est calculée *via* le théorème de Pythagore et majorée en tenant compte du résultat établi au début de la question.

III.4. *Pourquoi existe-t-il un point α de $\mathbb{C}$ tel que $h'(\alpha) \neq 0$? Montrer (en utilisant les résultats établis dans la partie* **II***, en particulier en* **II.5***) que l'image du disque unité $D(0,1)$ par l'application*

$$\Phi\ : z \in D(0,1) \mapsto \frac{1}{64} h\Big(\alpha + \frac{64z}{h'(\alpha)}\Big)$$

contient un disque ouvert de rayon $1/16$. En déduire que l'image par h du disque $D(\alpha, 64/|h'(\alpha)|)$ contient un disque de rayon 4 et conclure à une contradiction avec la conclusion de la question **III.3***. Dire pourquoi ceci conclut la preuve du petit théorème de Picard.*

L'existence de α résulte du fait que h n'est pas constante (sinon f le serait). La fonction Φ est la restriction à $D(0,1)$ d'une fonction entière. De plus $\Phi'(0) = 1$ (par la règle de Leibniz). On est dans le cadre de la partie **II** et la conclusion de la question **II.5** est valide pour cette fonction Φ. L'image du disque unité par Φ contient un disque de rayon $1/16$. Compte tenu de la relation

$$\frac{1}{64} h\Big(\alpha + \frac{64z}{h'(\alpha)}\Big) = \Phi(z) \quad \forall\, z \in D(0,1)$$

liant Φ et h, l'image par h du disque ouvert de centre α et de rayon $64/|h'(\alpha)|$ contient un disque de rayon $64 \times 1/16 = 4$. Ceci est en contradiction avec le fait que tout point du plan est à une distance au plus égale à $\simeq 3.22$ (voir la question **III.3**) de l'ensemble « interdit » pour les valeurs de h. La contradiction obtenue permet de conclure à l'absurdité de l'hypothèse « f non constante », donc au petit théorème de Picard.

III.5. (une application du corollaire du grand théorème de Picard, théorème VI-4-1 du cours). *Montrer que, si $p \in \mathbb{C}[X]$, l'équation $e^z = p(z)$ a une infinité de solutions.*

La fonction $z \mapsto p(z)e^{-z}$ est une fonction entière (qui n'est pas un polynôme) ne prenant qu'un nombre fini de fois (puisque p est un polynôme) la valeur 0. Elle prend donc une infinité de fois (d'après le corollaire du théorème VI-4.1 du cours) toute autre valeur complexe, en particulier la valeur 1. L'équation $e^z = p(z)$ a donc une infinité de solutions dans le plan complexe.