ANNÉE : 2005/2006 — SESSION DE SEPTEMBRE 2006
ÉTAPE : Pin401EX — **UE : PIN401** Math. pour Physiciens
Date : 6 Septembre 2006 — De 14h à 17h
Documents non autorisés.
Épreuve rédigée par A.Y.LeRoux et A.Yger — Durée : 3 heures

-1-

Algèbre et Probabilités

Un assureur gère un portefeuille de N assurés automobilistes, classés en trois catégories : *Bonus*, *Normal* et *Malus*, dont l'effectif est respectivement noté U_k, V_k, W_k pour l'année k. Il s'agit de trois variables aléatoires dont la somme est toujours égale à N.

1 $^\circ$ - Les variables aléatoires U_k, V_k, W_k sont elles indépendantes ?

Chaque année, certains assurés subissent un sinistre dont ils sont considérés comme responsables, et qui provoque éventuellement un changement de catégorie. On note p la probabilité d'un tel sinistre pour un assuré (on prend la même valeur de p pour chaque catégorie, pour simplifier le problème ; ceci correspond aussi à une forte vigilance policière). Ainsi, un nombre X_k de la catégorie *Bonus* va être reclassé *Normal*, tandis que $U_k - X_k$ resteront dans la catégorie *Bonus* à la fin de l'année k. On suppose que la variable aléatoire X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(U_k, p)$.

De la même façon, on note Y_k le nombre d'assurés de la catégorie *Normal* ayant subi un tel sinistre durant l'année, k, assimilé à une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(V_k, p)$, et qui seront reclassés en *Malus*. Les autres $V_k - Y_k$ seront reclassés en *Bonus*. On note ensuite Z_k le nombre d'assurés de la catégorie *Malus* ayant subi un tel sinistre durant l'année, k, assimilé à une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(W_k, p)$, et qui seront maintenu en *Malus*. Les autres $W_k - Z_k$ seront reclassés en *Normal*.

2 $^\circ$ - Montrer que ces reclassements correspondent aux bilans

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= U_k + V_k - Y_k - X_k \\ V_{k+1} &= W_k - Z_k + X_k \\ W_{k+1} &= Y_k + Z_k \end{aligned} .$$

3 $^\circ$ - Calculer $E(X_k)$, $E(Y_k)$ et $E(Z_k)$.

4 $^\circ$ - On note

$$u_k = E(U_k) \ , \ v_k = E(V_k) \ , \ w_k = E(W_k) \ , \ et \ R_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \ , \ M = \begin{pmatrix} 1-p & 1-p & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 0 & p & p \end{pmatrix} .$$

Montrer que

$$R_{k+1} = M \ R_k \ .$$

5 $^\circ$ - Calculer le déterminant de M.

6 ° - Montrer que $\lambda = 1$ est valeur propre de M, et calculer les deux autres valeurs propres en fonction de $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$.
7 ° - Calculer le vecteur propre R, associé à $\lambda = 1$ et dont la somme des composantes est égale à N.
8 ° - Montrer que, si la suite R_k converge (lorsque $k \longrightarrow \infty$), sa limite est nécessairement R.
9 ° - La catégorie *Bonus* bénéficie d'une réduction de 50% et la catégorie *Malus* subit une augmentation de 100% de sa prime. Ainsi, la recette est proportionnelle à

$$S_k \;=\; 2\,W_k \;+\; V_k \;+\; \frac{1}{2}\,U_k \;-\; \mu\;(X_k + Y_k + Z_k) \quad ,$$

en notant μ le quotient du coût moyen d'un sinistre par le montant de la prime. En pratique, on a $\mu > 1$. Exprimer $E(S_k)$ en fonction de p *et* R_k.
10 ° - Déterminer la limite de $E(S_k)$. Il s'agit de l'espérance de recette : cette espérance est-elle croissante ou décroissante au voisinage de $p = 0$? (c'est à dire, la vigilance policière est elle favorable ou défavorable pour les intérêts de l'assureur ?)

-2-

Probabilités

Sur les $N = 192$ matches des trois dernières coupes du monde (1998, 2002 et 2006), 498 buts ont été marqués, en cumulant les scores des deux équipes pour chaque match et sans compter les séances de tirs au but. De plus, parmi ces matches, 88 n'ont compté que 0, 1 ou 2 buts.

On représente par la variable aléatoire X le nombre de buts par match. On veut savoir quelle est la meilleure loi à associer à cette variable aléatoire X, entre une loi de Poisson ($P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$) et une loi géométrique ($P(X = n) = a^n(1-a)$, $0 < a < 1$).
1 ° - Donner une estimation de la moyenne de X, notée $m = E(X)$. On suppose dorénavant que cette estimation de m est exacte.
2 ° - Déterminer λ et a en fonction de m.
3 ° - On suppose dans un premier temps que X suit la loi géométrique de paramètre a. Calculer sa variance.
4 ° - On note Y la variable de Bernoulli définie par

$$Y \;=\; \begin{cases} 1 & \textit{pour } X \leq 2, \\ 0 & \textit{pour } X \geq 3. \end{cases}$$

Etudier la variable aléatoire Y (moyenne, écart-type)
5 ° - On note T le nombre de matches de score ≤ 2 buts. Evaluer la probabilité $P\,(75 \leq T \leq 120)$. (Une table des valeurs de la loi normale réduite est jointe à ce texte).
6 ° -7 ° -8 ° - Reprendre les questions 3 ° -4 ° -5 ° pour X suivant la loi de Poisson de paramètre λ, et proposer la meilleure loi à associer à la variable aléatoire X .

Table de la loi normale réduite (T.S.V.P.)

$$F(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\int_{-\infty}^{x} \; e^{-\frac{\xi^2}{2}} \; d\xi.$$

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0.0	0.5	1.0	0.8413	2.0	0.9773
0.1	0.5398	1.1	0.8643	2.1	0.9821
0.2	0.5793	1.2	0.8849	2.2	0.9861
0.3	0.6179	1.3	0.9032	2.3	0.9893
0.4	0.6554	1.4	0.9192	2.4	0.9918
0.5	0.6915	1.5	0.9332	2.5	0.9938
0.6	0.7257	1.6	0.9452	2.6	0.9953
0.7	0.7580	1.7	0.9554	2.7	0.9965
0.8	0.7881	1.8	0.9641	2.8	0.9974
0.9	0.8159	1.9	0.9713	2.9	0.9981

-3-

Algèbre

On s'intéresse au calcul des vitesses de vent dans l'atmosphère terrestre. On note $u,\; v,\; et\; w$ les composantes de la vitesse de l'air (le vent) dans les directions Ouest-Est (longitude), Sud-Nord(latitude) et verticale (altitude), respectivement. En un point de latitude ϕ on introduit la matrice

$$M(\phi) \;=\; \begin{pmatrix} k & -\omega_0 \; sin\phi & \omega_0 \; cos\phi \\ \omega_0 \; sin\phi & k & 0 \\ -\omega_0 \; cos\phi & 0 & k \end{pmatrix} \;\;,$$

où k est un paramètre de friction et $\omega_0 = \frac{\pi}{21600}$ est la fréquence de Coriolis. On obtient la vitesse du vent

$$V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

en résolvant le système linéaire

$$M(\phi)\; V \;\;=\;\; F(\phi)\;,$$

où $F(\phi)$ est une donnée météorologique de la forme

$$F(\phi) \;\;=\;\; - \begin{pmatrix} A(\phi)\; \frac{\partial P}{\partial x} \\ A(\phi)\; \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho}\; \frac{\partial P}{\partial z} + \; g \end{pmatrix} \;,\; avec\; A(\phi) \;\;=\;\; \frac{1}{\rho\; cos^2\phi}$$

et où ρ représente la densité de l'air, de l'ordre de l'unité, P la pression atmosphérique locale et g la constante de gravité (constante locale, qui dépend légèrement de ϕ).

1 ° - Calculer le déterminant de $M(\phi)$.

2 ° - Calculer les valeurs propres de $M(\phi)$.

3 ° - Déterminer les vecteurs propres correspondants (de norme euclidienne égale à 1).

4 ° - Ecrire la matrice $M(\phi)$ dans la nouvelle base constituée de ces vecteurs propres.

5 ° - Calculer $A = M' \ M$ où M' représente la matrice transposée de M.

6 ° - Calculer les valeurs propres de A et les vecteurs propres correspondants (de norme euclidienne égale à 1).

7 ° - Ecrire la matrice de projection sur cette nouvelle base, et en déduire une technique pour résoudre le système linéaire

$$M(\phi) \ V \ = \ F(\phi) \ ,$$

sans inverser la matrice $M(\phi)$.

8 ° - On considère l'ensemble

$$K(\phi) \ = \ \left\{ \ V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \ \middle| \ v \ cos\phi + w \ sin\phi \ = \ 0 \ \right\} .$$

Montrer que $K(\phi)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension ?

9 ° - Montrer que $K(\phi)$ est invariant par l'application linéaire dont M est la matrice, c'est à dire

$$V \in K(\phi) \Longleftrightarrow MV \in K(\phi) \ .$$

10 ° - Calculer le produit scalaire (MV, V) en fonction de la norme euclidienne de V, notée $\|V\|$.

Remarque : En pratique le coefficient k est petit et la question 10 ° nous indique que la direction de la vitesse du vent est proche de la tangente à l'isobare locale, dont $F(\phi)$ est la normale.