Année : 2004/2005 — Session de Septembre 2005

ÉTAPE : Pin401EX — **UE : PIN401EX** Math. pour Phys.

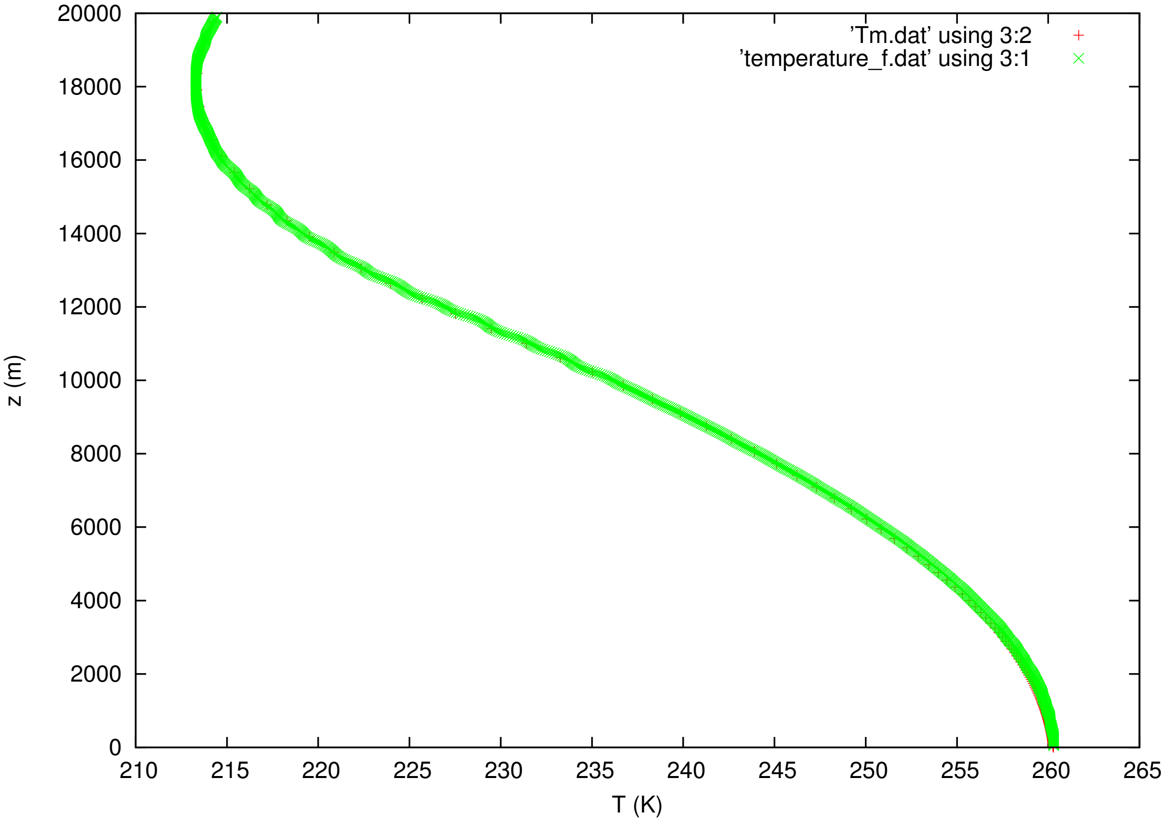
Date : xx septembre 2005 — De x :xx à x :xx

Documents non autorisés.

Épreuve de Monsieur LeRoux — Durée conseillée : une heure trente

-1-

La distribution de température dans la couche atmosphérique correspond à une courbe de la forme ci dessous, obtenues à partir de mesures de radiosondes, en présentant un point d'inflexion situant la tropopause, entre la troposphère (en dessous) et la stratosphère (au dessus).



Le cas présenté ici correspond à une région de latitude assez proche du pôle, la température au sol étant de 260 $^\circ$ K, soit -13 $^\circ$ C. Dans une telle région, la tropopause se situe à 10 km d'altitude environ. Nouns utiliserons ici une unité correspondant à une hauteur de 10 km, de façon à travailler sur l'intervalle $[0, 2]$, la tropopause se situant au milieu de l'intervalle, en $x = 1$.

Le but de ce problème est d'approcher cette courbe en n'utilisant qu'un nombre réduit de paramètres. On constate d'abord qu'il n'y a pas de symétrie par rapport à la valeur au milieu, en $x = 1$, ce qui exclut la représentation par un polynôme de degré 3. On s'intéresse à l'espace H constitué des fonctions v définies sur l'intervalle $[0, 2]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\begin{gathered} v \;\in\; C^1([0,2]) \;\; , \\ v \textit{ est un polynôme de degré } \le 2 \textit{ sur } [0,1], \\ v \textit{ est un polynôme de degré } \le 2 \textit{ sur } [1,2] \;\; . \end{gathered}$$

1 ° - Montrer que H est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2 ° - Montrer que H est de dimension 4. Indication : on posera

$$v(x) \;=\; \begin{cases} a \;+\; b(x-1) \;+\; c(x-1)^2 & si\ 0 < x < 1 \;, \\ a' \;+\; b'(x-1) \;+\; d(x-1)^2 & si\ 1 < x < 2 \;. \end{cases}$$

et on cherchera une relation entre a et a' puis une autre relation entre b et b'.
3 ° - On considère les fonctions $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ définies sur $[0, 2]$ par :

$$\begin{aligned} v_1(x) \;&=\; 1\ (fonction\ constante) \\ v_2(x) \;&=\; \sqrt{5}\ (x-1)^2 \\ v_3(x) \;&=\; \sqrt{3}\ (x-1) \\ v_4(x) \;&=\; \sqrt{5}\ (x-1)\ |x-1| \;. \end{aligned}$$

Le choix des constantes a pour but de faciliter les calculs plus loin. Montrer que ces quatre fonctions constituent une base de H.
4 ° - On considère la matrice A dont les coefficients sont définis par

$$a_{ij} \;=\; \int_0^2 v_i(x)\ v_j(x)\ dx \qquad (i,j \in \{1,2,3,4\}) \;.$$

La matrice A est-elle symétrique ?
5 ° - Calculer les coefficients a_{ij}, pour $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, et écrire la matrice A.
6 ° - Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et en déduire les valeurs propres de A, ainsi que ses vecteurs propres.
7 ° - Calculer le déterminant de A.
8 ° - En considérant les rapports entre ces valeurs propres, peut-on condidérer que cette matrice soit bien conditionnée ?

9 ° - Les mesures des radiosondes fournissent des données que l'on convertit sous la forme d'une fonction f définie et intégrable sur $[0,2]$. On cherche alors une fonction $v \in H$ réalisant

$$\underset{u \in H}{Inf} \int_0^2 |u(x) - f(x)|^2 \, dx \; = \; \int_0^2 |v(x) - f(x)|^2 \, dx.$$

Pour cela, on écrit v sous la forme

$$v(x) \; = \; \beta_1 v_1(x) \; + \; \beta_2 v_2(x) \; + \; \beta_3 v_3(x) \; + \; \beta_4 v_4(x) \; .$$

Montrer que le vecteur X de composantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ est la solution du système linéaire

$$A \, X \; = \; F,$$

où F est le vecteur de composantes f_1, f_2, f_3, f_4 données par

$$f_i \; = \; \int_0^2 f(x) \; v_i(x) \; dx \quad .$$

10 ° - Résoudre ce système lorsque la valeurs des mesures donnent

$$f_1 = 471.49071 \; , \; f_2 = 352.31732 \; , \; f_3 = -32.7621 \; , \; f_4 = \; -30.221767 \; .$$

11 ° - Quelle est la valeur obtenue pour la température au sol ?
12 ° - On observe que ce n'est pas exactement la valeur attendue, et comme la mesure d'une température au sol est très facile à réaliser directement, on va remplacer une des quatre équations précédentes, par exemple la dernière par une équation liant les coefficients $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ et la température au sol mesurée (ici 260 ° K). Ecrire cette équation.
13 ° - Résoudre le nouveau système ainsi obtenu (on notera M sa matrice).
14 ° - Ecrire la décomposition de Cholesky pour A. Cette décomposition est-elle encore possible pour M ?