ANNÉE 2003-2004 SESSION DE SEPTEMBRE 2004

GU : SM4 PM **UE** : 411 MP

Date : Jeudi 02 Septembre 2004, 14.00-17.00 Durée : 3 heures

Documents non autorisés

TEXTE (en italiques) et CORRIGÉ

Exercice 1 (intégration)

Soient ϵ et R deux nombres strictement positifs tels que $\epsilon < R$. On note $C(\epsilon, R)$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$C(\epsilon, R) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \epsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}\,.$$

1. *Calculer, pour $\epsilon > 0$ arbitairement petit, l'intégrale triple*

$$I(\epsilon, R) := \iiint_{C(\epsilon,R)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

On utilise pour faire le calcul de $I(\epsilon, R)$ le passage des cordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques et la formule de changement de variables correspondant, soit

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\varphi\,, \end{aligned}$$

θ (à prendre entre 0 et 2π) représentant la longitude et φ (à prendre entre 0 et π) la colatitude comptée à partir du pôle Nord. On a donc

$$I(\epsilon,R) = \int_\epsilon^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2\sin\varphi}{r}\, drd\theta d\varphi = \frac{2\pi}{2}(R^2-\epsilon^2)\Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi = 2\pi(R^2-\epsilon^2)\,.$$

2. *Quelle est la limite de $I(\epsilon, R)$ lorsque ϵ tend vers 0 ?*

La limite vaut $2\pi R^2$.

3. *On considère le champ de vecteurs $\vec{F}(x,y,z) := (x^2, y^2, -2z(x+y)+z^3)$ dans $\mathbb{R}^3$; calculer le rotationnel et la divergence de ce champ de vecteurs.*

Le rotationnel du champ $\vec{F}$ s'exprime dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 & y^2 & -2z(x+y)+z^3 \end{vmatrix}\,.$$

On trouve

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 2z(\vec{j} - \vec{i})\,.$$

La divergence de $\vec{F}$ est

$$\mathrm{div}\,F = (\partial/\partial x)(x^2) + (\partial/\partial y)(y^2) + (\partial/\partial z)(-2z(x+y)+z^3) = 3z^2\,.$$

4. *Calculer le flux $\Phi(\epsilon, R)$ du champ de vecteurs $\vec{F}$ sortant du domaine $C(\epsilon, R)$ (c'est-à-dire le flux du champ à travers la surface matérialisant le bord de $C(\epsilon, R)$, la normale pointant vers l'extérieur de ce domaine), puis la limite de $\Phi(\epsilon, R)$ lorsque ϵ tend vers 0.*

On applique la formule de Green-Ostrogradski ; le flux du champ $\vec{F}$ sortant du domaine $C(\epsilon, R)$ est égal à l'intégrale triple dans ce domaine de la divergence de $\vec{F}$, soit

$$\begin{aligned}
\Phi(\epsilon, R) &= 3\iiint_{C(\epsilon,R)} z^2 dxdydz \\
&= 3\int_\epsilon^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r\cos\varphi)^2 \times r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi \\
&= 6\pi \times \frac{R^5 - \epsilon^5}{5} \times \int_{-1}^1 u^2 du = 4\pi \frac{R^5 - \epsilon^5}{5}\,.
\end{aligned}$$

Cette quantité tend vers $4\pi R^5/5$ lorsque ϵ tend vers 0.

Exercice 2 (formes différentielles, intégrale curviligne)

1. *Soit α un paramètre strictement positif ; pour quelles valeurs de α la forme différentielle ω_α définie dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par*

$$\omega_\alpha(x,y) := \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

est-elle une forme fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Existe-t-il une valeur de α telle que ω_α soit une forme exacte dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

La forme ω_α s'écrit

$$\frac{xdx + ydy}{(x^2+y^2)^\alpha} + \frac{xdy - ydx}{(x^2+y^2)^\alpha}\,;$$

si $\alpha \neq 1$, c'est la somme de la forme exacte

$$\frac{xdx + ydy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{1}{2(1-\alpha)} d\Big[(x^2+y^2)^{1-\alpha}\Big]$$

et de la forme $\tau_\alpha := (xdy - ydx)/(x^2+y^2)^\alpha$. En calculant $d\tau_\alpha$, on trouve

$$d\tau_\alpha = 2(1-\alpha)\frac{dx \wedge dy}{(x^2+y^2)^\alpha}\,.$$

La forme ω_α ne peut être fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que si τ_α l'est, c'est-à-dire $d\tau_\alpha \equiv 0$, soit $\alpha = 1$. Elle ne peut être exacte que dans le cas $\alpha = 1$; mais comme

$$\int_{t\in[0,2\pi]\to(\cos t,\sin t)} \tau_1 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0\,,$$

la forme τ_1 ne peut dériver d'un potentiel dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; *a fortiori*, ω_1 n'est pas exacte, donc ω_α n'est exacte pour aucune valeur de α.

2. *Vérifier que la forme différentielle*

$$\omega\ : (x,y) \to \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}(xdx + ydy)$$

est une forme exacte dans $\mathbb{R}^2$ *; exhiber un potentiel dont elle dérive.*

La forme ω est la différentielle du potentiel

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

et c'est donc une forme exacte dans $\mathbb{R}^2$.

3. *Calculer l'intégrale curviligne de ω sur le chemin paramétré*

$$\gamma\ : t \in [0,2\pi] \to (a\cos t, b\sin t)\,,$$

a et b étant deux nombres strictement positifs.

La forme ω est exacte et le chemin paramétré γ est un lacet de classe C^1 ; l'intégrale de ω sur γ vaut donc $U(\gamma(2\pi)) - U(\gamma(0)) = 0$.

4. *Calculer de deux manières différentes l'intégrale curviligne de la forme différentielle $xdy - ydx$ sur le même chemin paramétré γ.*

Par la formule de Green-Riemann, l'intégrale sur γ de $xdy-ydx$ vaut deux fois l'aire du contour enserré par l'ellipse $\mathrm{Supp}\,\gamma$. Comme cette ellipse s'obtient à partir du cercle par dilatation par a dans le sens des abscisses, par dilatation par b dans le sens des ordonnées, l'aire du domaine enserré vaut πab et l'intégrale de ω sur γ vaut $2\pi ab$.

Par un calcul direct, on a

$$\int_\gamma \omega = ab\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi ab\,.$$

Exercice 3 (probabilités)

Soit N un nombre entier strictement supérieur à 1. On tire un nombre au hasard dans la liste $\{1, ..., N\}$, la distribution de probabilité étant la loi uniforme (tous les tirages sont équiprobables).

1. *Soit p un diviseur premier de N (c'est-à-dire un entier $p > 1$ divisant N et dont les seuls diviseurs sont 1 et p). Calculer en fonction de N et de p la probabilité de l'évènement*

$$A_p := \{\text{le nombre tiré est un multiple de } p\},$$

puis la probabilité de son complémentaire.

La probabilité de A_p s'obtient en divisant le nombre de tirages favorables par le nombre de tirages possibles. Si p divise N, il y a N/p multiples de p entre 1 et N. On a donc

$$P(A_p) = \frac{1}{N} \times \frac{N}{p} = \frac{1}{p}.$$

On a $P(A_p^c) = 1 - \dfrac{1}{p}$.

2. *Soient $p_1, ..., p_k$ les nombres premiers distincts divisant N. Montrer que les évènements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants. Sont-ils incompatibles ?*

Soient $q_1, ..., q_l$ l nombres premiers distincts divisant N ; le produit $q_1 \cdots q_l$ divise aussi N. Dire qu'un évènement élémentaire est dans l'intersection des A_{q_j}, $j = 1, ..., l$, signifie que le tirage associé correspond à un nombre multiple de q_1, ..., q_l, donc du produit $q_1 \cdots q_l$ (puisque ces nombres sont des nombres premiers distincts). La probabilité de $A_{q_1} \cap \cdots \cap A_{q_l}$ vaut donc $1/N \times N/(q_1 \cdots q_l) = 1/q_1 \times \cdots \times 1/q_l$ et l'on a donc

$$P(A_{q_1} \cap \cdots \cap A_{q_l}) = P(A_{q_1} \times \cdots \times P(A_{q_l}).$$

Comme ceci est vrai pour toute famille de nombres premiers distincts divisant N, les évènements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.

Ils ne sont bien sûr pas incompatibles car le tirage du nombre N est un évènement élémentaire dans l'intersection de tous les A_{p_j}, $j = 1, ..., k$ (comme d'ailleurs le tirage de tout multiple de $p_1 \cdots p_k$ appartenant à $\{1, ..., N\}$).

3. *On tire un nombre au hasard entre 1 et N ; quelle est la probabilité que ce nombre soit premier avec N, c'est-à-dire ne soit divisible par aucun des diviseurs premiers $p_1, ..., p_k$ de N ? On exprimera cette probabilité en fonction de $p_1, ..., p_k$.*

Cette probabilité est celle de l'évènement $A^c_{p_1} \cap \cdots \cap A^c_{p_k}$, où $p_1, ..., p_k$ sont les k diviseurs premiers distincts de N. Comme les A_{p_j}, $j = 1, ..., k$, sont mutuellement indépendants, leurs complémentaires le sont aussi et l'on a

$$P(A^c_{p_1} \cap \cdots \cap A^c_{p_k}) = P(A^c_{p_1}) \times \cdots \times P(A^c_{p_k}) = \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_j}) \,.$$

4. *On note $\varphi(N)$ le nombre d'entiers entre 1 et N premiers avec N ; déduire du calcul effectué au* **3** *la célèbre formule d'Euler*

$$\varphi(N) = N \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_j}) \,.$$

La probabilité calculée au **3** s'exprime aussi comme le nombre de tirages favorables (le nombre d'entiers entre 1 et N premiers avec N) divisé par le nombre de tirages possibles (N). On a donc

$$\frac{\varphi(N)}{N} = \prod_{j=1}^{N} (1 - \frac{1}{p_j}) \,,$$

d'où la formule d'Euler en multipliant les deux membres par N.

Exercice 4 (probabilités)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre μ ; que vaut $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$? Exprimer en fonction de μ l'espérance et la variance de X.*

Par définition de la loi de Poisson, on a

$$P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \,.$$

La fonction génératrice de la loi de Poisson est la fonction

$$t \to E[X^t] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{(\mu t)^k}{k!} = \exp(\mu(t-1)) \,.$$

On a

$$E[X] = \Big(\frac{d}{dt} E[X^t]\Big)_{t=1} = \mu \exp(\mu(t-1))_{t=1} = \mu \,.$$

D'autre part

$$E[X^2]-E[X]=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)P(X=k)=\Big(\frac{d^2}{dt^2}E[X^t]\Big)_{t=1}=\mu^2\,,$$

d'où $E[X^2]=\mu+\mu^2$, ce qui donne

$$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\mu+\mu^2-\mu^2=\mu\,.$$

2. *On suppose que la loi conditionnelle de Y sachant $X=k$ est une loi binomiale de paramètres (k,p) (avec $p\in[0,1]$), ce qui signifie*

$$P(Y=l|X=k)=\begin{cases}\dfrac{k!}{l!\,(k-l)!}p^l(1-p)^{k-l} & \text{si } l\le k\\ 0 & \text{si } l>k\,.\end{cases}$$

Quelle loi suit la variable Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

On calcule $P(Y=l)$ en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(Y=l) &= \sum_{k=0}^{\infty}P((Y=l)\cap(X=k))=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)P(Y=l|X=k)\\ &= \sum_{k=l}^{\infty}e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}\times\frac{k!}{l!(k-l)!}p^l(1-p)^{k-l}\\ &= \frac{e^{-\mu}(\mu p)^l}{l!}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^{k-l}}{(k-l)!}\\ &= \frac{e^{-\mu}(\mu p)^l}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^{k}}{k!}\\ &= \frac{e^{-\mu}(\mu p)^l}{l!}\times e^{\mu(1-p)}=\frac{e^{-\mu p}(\mu p)^l}{l!}\,.\end{aligned}$$

La loi de Y est une loi de Poisson de paramètre μp. La loi de Y conditionnée par $\{X=k\}$ n'est pas la loi de Y, les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Questions de cours (probabilités)

1. *Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (avec des hypothèses bien précisées). Expliquez en brièvement l'intérêt pratique.*

Si X est une variable aléatoire telle que $E(|X|^2)<+\infty$, on a, pour tout $\epsilon>0$,

$$P(|X-E[X]|>\epsilon)\le\frac{V(X)}{\epsilon^2}\,.$$

Cette inégalité (qui n'a d'intérêt que si $\epsilon > \sigma(X)$ permet d'estimer les chances qu'a la réalisation d'une variable aléatoire de différer de plus de ϵ de la moyenne de cette variable. Si X est réelle, on peut minorer ainsi la probabilité qu'une réalisation de X soit dans un intervalle de diamètre 2ϵ centré autour de l'espérance de X.

2. *Enoncer les lois faible et forte des grands nombres (toujours avec des hypothèses bien précisées). Expliquez-en brièvement l'intérêt pratique.*

La loi faible s'énonce ainsi : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, telles que $E[|X_1|^2] < +\infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - E[X_1]\Big| > \epsilon\Big) = 0\,.$$

La loi forte s'énonce ainsi : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, telles que $E[|X_1|^2] < +\infty$, alors

$$P\Big(\omega\ ;\ \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} \text{ ne tend pas vers } E[X_1]\Big) = 0\,.$$

La loi forte des grands nombres soutend le raisonnement statistique : si l'on répète une épreuve de moyenne m, on retrouve empiriquement la moyenne en sommant les valeurs des réalisations obtenues en les n premiers coups, en divisant par n, puis en faisant tendre n vers l'infini. La moyenne probabiliste est aussi une moyenne empirique.

3. *Montrer comment la loi faible des grands nombres se déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Si $X_1, ..., X_n$ sont de même loi et telles que $E[|X_1|] < \infty$, l'espérance de la variable $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ vaut $E[X_1]$. Si de plus les variables sont deux-à-deux indépendantes et telles que $E[|X_1|^2] < \infty$, on a

$$V\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big) = \frac{1}{n^2} \times nV(X_1) = \frac{V(X_1)}{n}\,.$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $(X_1 + \cdots + X_n)/n$, il vient donc, pour tout $\epsilon > 0$,

$$P\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - E[X_1]\Big| > \epsilon\Big) \leq \frac{V(X_1)}{n\epsilon^2}\,.$$

Comme le second membre de cette inégalité tend vers 0 si n tend vers l'infini, on conclut bien à la loi faible des grands nombres.