Université de Bordeaux

TPM103U Bases de Mathématiques pour les sciences, 2020

Chapitre 5 : Fonctions

5.1 Généralités sur les fonctions

- On appelle *fonction d'une variable réelle à valeurs réelles*, ou encore, *fonction numérique*, une *application* d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, autrement dit une correspondance entre les éléments de D et ceux de $\mathbb{R}$ telle que tout élément de D à une seule image.
- La partie D est appelée **ensemble de définition** de la fonction. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles.
- La phrase générique "Soit f une fonction réelle définie sur D" signifie que f est une application de D dans $\mathbb{R}$.
- Comme exemples de fonction définie sur $\mathbb{R}$: $x \to x^2$, $x \to e^x$, $x \to \cos(x)$, $x \to \sin(x)$. La fonction $f : x \to \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Definition 1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$.
- f est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$.
- f est **bornée** si elle est minorée et majorée. Cela équivaut à : $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A$

Exercices : (1) Montrer que la fonction $x \mapsto -x^2 + \frac{\sin(x)}{x+1}$ est majorée sur $]0, +\infty[$.

(2) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 + \frac{\sin(x)}{x+1}$ est minorée sur $]0, +\infty[$.

(3) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{2\sin(x)+x^2}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

5.2 Limite

5.2.1 Limite d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ signifie que "tout intervalle contenant ℓ, contient $f(x)$ pour x assez proche de x_0". Plus précisément

Definition 2

(Limite finie en un point)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ ou l'une des extrémités de I. On dit que ℓ *est limite de f en x_0* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque.

1. L'ordre des quantificateurs est important et on ne peut pas échanger $\forall\varepsilon$ avec $\exists\delta$: le δ dépend du ε.

2. L'inégalité $|x - x_0| \leq \delta$ équivaut à $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. L'inégalité $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \epsilon]$.

3. Si x_0 est un point de I et si f admet une limite finie en x_0, alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$.

Exercices : Montrer en utilisant la définition que $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$.

Definition 3

(limite infinie en un point) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ ou l'une des extrémités de I .

- On dit que $+\infty$ *est limite de f en x_0* si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que $-\infty$ est limite de f en x_0 si

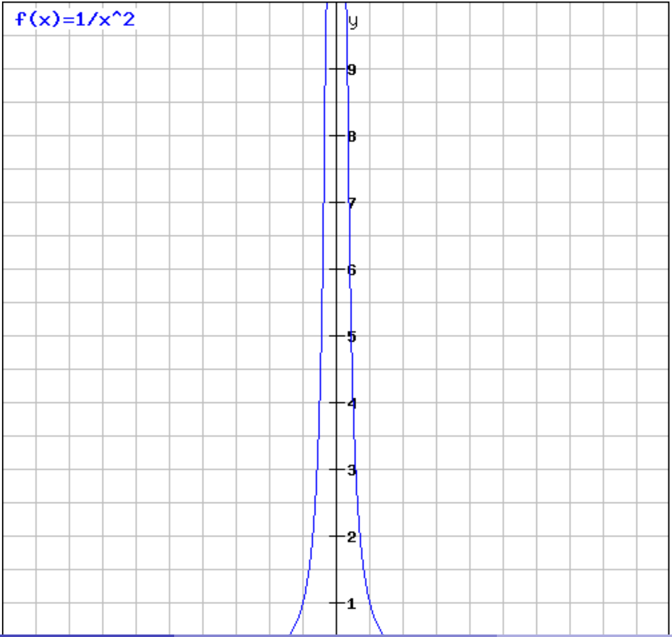
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq M.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x est assez proche de x_0.

On dit alors que la droite d'équation $x = x_0$ est *asymptote verticale* à la courbe représentative de la fonction f.

- Exemple : On a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.



Proposition 4

(**Unicité de la limite**). *Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en x_0, alors $\ell = \ell'$.*

Exercice : Trouvez les nombres réels a tels que $\lim_{x\to 1} a^2x^2 + ax - 1 = 1$.

5.2.2 Limite d'une fonction en l'infini

Definition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a, +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit alors que ℓ *est limite en* $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

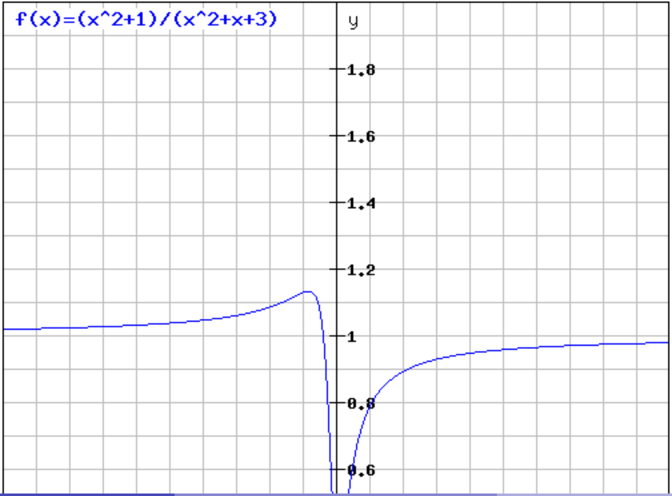
$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut quand x est suffisamment grand.

On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe représentative de la fonction f.

Par exemple $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x+3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x+3} = 1$. (Voir ci-dessous)



- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ signifie , $f(x)$ est aussi grand que l'on veut lorsque x est suffisamment grand.
- On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour les fonctions définies sur des intervalles de type $]-\infty, a[$.
- Exemple de référence : Soit $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Nous avons
  - $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$,
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair ,} \\ -\infty & \text{si n est impair,} \end{cases}$
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$,
  - $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty & \text{si} & n > m \\ 1 & \text{si} & n = m \\ 0 & \text{si} & n < m \end{cases}$
  - Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots b_1 x + b_0$ avec $b_m \neq 0$, alors

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m}}.$$

Ceci ne s'applique pas lorsque $x \to 0$, seulement lorsque $x \to +\infty$.

Exercices : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 + 2x^3 + 1}{3x^4 + x^2 + 3}, \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5 + 2x^3 + 1}{2x^4 + x^2 + 3}, \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 + 3}, \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2x^3 + 1}{-x^3 + x^2 + 3}.$$

5.2.3 Limite à gauche et à droite

Il arrive que le comportement local d'une fonction f soit différent à gauche d'un point x_0 (c'est à dire pour $x < x_0$) et à droite de x_0 (c'est à dire $x > x_0$). Nous sommes donc amenés à introduire les notions de limites à gauche et à droite :

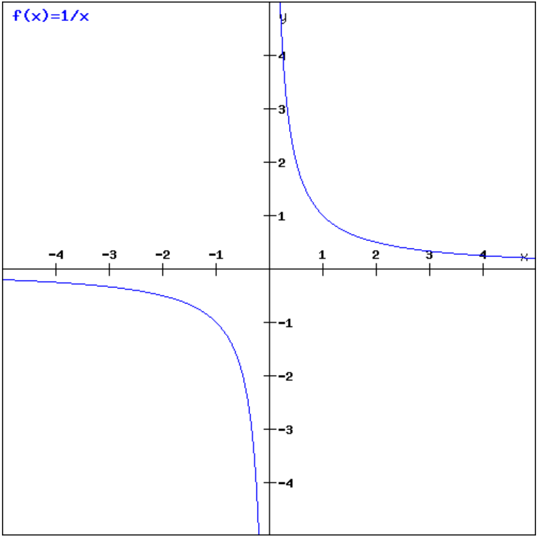
Definition 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I (de la forme $]a, x_0[$, $]x_0, b[$ ou $]a, x_0[\cup]x_0, b[$) . Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet ℓ pour *limite à gauche* en x_0 si la restriction de f à $]a, x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0.
  On note alors $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$
- On dit que f admet l pour *limite à droite* en x_0 si la restriction de f à $]x_0, b[$ admet ℓ pour limite en x_0.
  On note alors $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

On note aussi $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ par $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ par $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Exemple : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



Exercice : Calculer les limites à droite et à gauche de la fonction f en x_0 dans les cas suivants : (i) $f(x) = \frac{4x+1}{-x-1}$ et $x_0 = -1$ (ii) $f(x) = \frac{x^2+2|x|}{x}$ et $x_0 = 0$ (iii) $f(x) = E(x)$ et $x_0 = n$ où $E(x)$ est la partie entière de x et n un entier.

5.2.4 Opérations sur les limites

Opérations algébriques Cas des limites finies.

Soient f et g deux fonctions admettant des limites finies en a, alors :

1. $f+g$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. fg admet une limite en a et $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \ \lim_{x\to a} g(x)$
3. Pour tout réel λ, λf admet une limite en a et $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$
4. Si de plus la limite de g est non nulle, $\frac{f}{g}$ admet une limite en a et
$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$
5. Si f admet l comme limite en a, alors $|f|$ admet $|l|$ comme limite en a.

Exercices : (1) Calculer les limites à droite et à gauche de la fonction f en x_0 avec $f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{(x-2)^2}$ et $x_0 = 2$ (3) $f(x) = \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$ et $x_0 = 5$.

(2) Calculer les limites des fonctions suivantes :
(i) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}$ en $+\infty$ (ii) $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en 1 (iii) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1.

Composition des limites.

Definition 7

Soient deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On définit la composée de f par g noté $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in I.$$

Soit la fonction $f : x \to x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $g : x \to \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$. La fonction $g \circ f(x) = \ln(x - 1)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $]1, +\infty[$.

Theorem 8 (Théorème de la limite composée)

Soient deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$ ou l'une des extrémités de I et soit $b \in J$ ou l'une des extrémités de J. Alors

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell,$$

a, b et ℓ peuvent être finis ou infinis.

Exercices : (1) Calculer la limite en $0+$ et en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x}}$.

(2) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sin(\frac{\pi x^3+2x+1}{3x^3+2})$.

Opérations algébriques. Cas des limites infinies.

1. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$.
2. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim(f+g) = -\infty$.
3. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$.
4. Si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(fg) = +\infty$ si $\ell > 0$, ou $\lim fg = -\infty$ si $l < 0$.
5. Si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim(fg) = -\infty$ si $\ell > 0$, ou $\lim(fg) = +\infty$ si $l < 0$.
6. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f\,g) = +\infty$.
7. **Formes indéterminées** : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}

Exercices : Calculer les limites des fonctions suivantes :

(i) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ en 2 (ii) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - 1)$ en $+\infty$ (iii) $\ln(x+1) - \ln(x)$ en $+\infty$.

5.2.5 Théorèmes sur les limites

Theorem 9

- *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et s'il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \leq A$, *alors* $\ell \leq A$.
- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$, *alors* $\ell \leq \ell'$.
- *(Théorème des gendarmes) Si* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *et si* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, *alors* g *admet aussi une limite en* a *et* $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$
- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *et* $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, *alors* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Remarque.

1. Les inégalités strictes ne sont pas conservées *par passage à la limite*. Par exemple $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} > 0$ mais $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.

2. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{1+x^2} = 0$. En effet, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et puisque $1 + x^2 > 0$, on a alors pour tout x
$$\frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$
Puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, le théorèmes des gendarmes (appelé aussi Théorème d'encadrement) nous donne le résultat.

Exercices : (1) Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad x-1 < E(x) \leq x$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0+} xE(\dfrac{1}{x}) = 0$.

(2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x\sin(x)}{x^2+1}$.

5.3 Continuité

Dans cette partie I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

5.3.1 Définitions

Definition 10

Soient f une fonction définie sur $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$. On dit que f est *continue en* x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

On dit que f est *continue sur* $]a,b[$ si elle est continue en tout point x_0 de $]a,b[$.

Remarques

1. Notons que f est continue en x_0 est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

2. La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point, alors elle n'est pas nulle autour de ce point.
3. Comme exemples de fonctions continues : $x \to x^2$, $x \to e^x$, $x \to \cos(x)$, $x \to \sin(x)$, $x \to |x|$, $x \to \ln x$ sur $]0, +\infty[$, $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

Propriétés 11

1. *Si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ et fg sont continues en x_0.*
2. *Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*
3. *Si f est continue en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est continue en x_0.*
4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et si g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Exercices : Etudier la continuité des fonctions suivantes :
(i) $f(x) = x\cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. (ii) $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $g(1) = -\frac{1}{2}$ et $g(-1) = 0$. (iii) $h(x) = ln(1 + \sin^2(x))$.

Definition 12

- f est *continue à droite en* $x_0 \in I$ si la restriction de f à $[x_0, +\infty[\cap I$ est continue en x_0 :
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- f est *continue à gauche en* x_0 si la restriction de f à $]-\infty, x_0] \cap I$ est continue en x_0 :
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

- Soit $[a, b]$ inclus dans I. On dit que f est *continue sur* $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Proposition 13

f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

Exercice : Etudier la continuité à droite et à gauche en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 + \sin^2(x))$ si $x > 0$, $f(x) = x^3 + 1$ si $x < 0$ et $f(0) = 0$.

5.3.2 Fonctions continues sur un intervalle

Theorem 14 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles. Soient $a, b \in I$ et m un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in I$, $a \leq c \leq b$ tel que $f(c) = m$.

Exemple *Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Si $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ alors il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$*

Exercices : (1) Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.
(2) Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5.4 Dérivabilité

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

5.4.1 Définitions

Definition 15

Soient $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est *dérivable en x_0* si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.
Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée *dérivée de f en x_0*.

Exercice : Les fonctions $|x|$ et $x|x|$ sont-elles dérivables en 0 ?

Definition 16

f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.
Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert inclus dans I. On dit que f est *dérivable sur* $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point x_0 de $]a, b[$.
La fonction $x \to f'(x)$ est la fonction dérivée de f. Elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Remarques

- (Rappel Lycée) La fonction $f : x \to x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 1$. En effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1.$$

Ainsi $f(x) = x$ est dérivable et $f'(x) = 1$.

- La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$. En effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Ainsi $f(x) = x^2$ est dérivable et $f'(x) = 2x$.

- Par changement de variable, on pose $x - x_0 = h$, $x \to x_0$ équivaut $h \to 0$, on a donc f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie.

Exercice : (1) En utilisant la définition, montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

(2) Même question pour la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

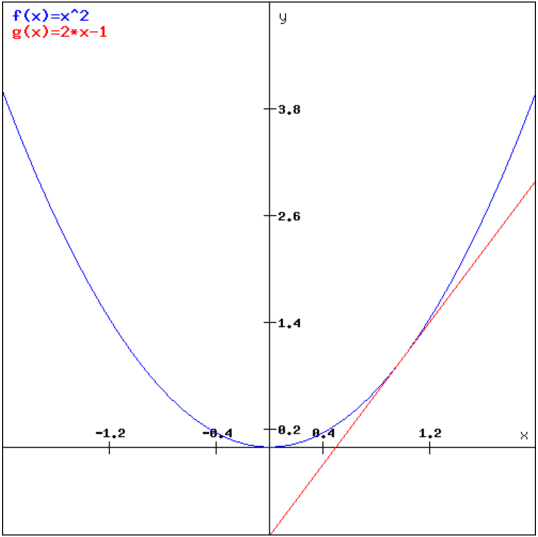
La valeur $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente.

Par exemple, soit $f : x \to x^2$, donnons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(1, f(1))$. On a $f(1) = 1$ et puisque $f'(x) = 2x$ on a $f'(1) = 2$.

Donc l'équation de la tangente au point $(1, f(1)) = (1, 1)$ est

$$y = f'(1)(x - 1) + 1 = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$$

.



Exercice : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en -1.

- f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ continue et nulle en x_0 telle que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Ce qui peut s'écrire pour tout h tel que $(x_0 + h) \in I$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Quelques dérivées de fonction classiques à connaître :

f	f'
constante	0
$x^n, \quad n \geq 1$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ pour $x \neq 0$, $\quad n \geq 1$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}, \quad x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x, \quad x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Definition 17

- f est *dérivable à droite en* x_0 si $f_{|[x_0,+\infty[\cap I}$ est dérivable, autrement dit si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ et appelée *dérivée de f à droite en x_0*. (f est alors continue à droite en x_0.)

- f est *dérivable à gauche en* x_0 si $f_{|]-\infty,x_0]\cap I}$ est dérivable, autrement dit si

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$ et appelée *dérivée de f à gauche en x_0*. (f est alors continue à gauche en x_0).

- Soit $[a,b]$ inclus dans I. On dit que f est *dérivable sur* $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Proposition 18

Soit f définie sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in]a, b[$. f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple Soit la fonction $f : x \to |x|$. On a $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$ et donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice : (1) Soit $f(x) = x^2 + x$ pour $x < 0$ et $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$. Etudier le dérivabilité à droite et à gauche de f en 0.

(2) Soit a un réel. Soit $g(x) = ax$ pour $x < 0$ et $g(x) = \ln(1 + x)$ pour $x \geq 0$. Pour quels a, g est-elle dérivable en 0 ?

5.4.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 19

1. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f+g$ est dérivable en x_0. On a*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors fg est dérivable en x_0. On a*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
3. *Si g est dérivable en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0. On a*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
Si f sont dérivables en x_0 alors f/g est dérivable en x_0 et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
4. *Si f est dérivable en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est dérivable en x_0. On a*
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$
5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0. On a*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Application de dérivation de fonctions composées

f	f'
$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x))$	$u'(x)v'(u(x))$
$u(x)^n, \quad n \geq 1$ Exemple : $(ax+b)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$ $na(ax+b)^{n-1}$
$\dfrac{1}{u(x)}, \quad u(x) \neq 0$	$\dfrac{-u'(x)}{u(x)^2}$
$\dfrac{1}{u(x)^n}, \quad u(x) \neq 0 \quad n \geq 1$	$\dfrac{-nu'(x)}{u(x)^{n+1}}$
$\sqrt{u(x)}, \quad u(x) > 0$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x)), \quad u(x) > 0$ Exemple : $\ln(ax^2+b), \quad ax^2+b > 0$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ $\dfrac{2ax}{ax^2+b}$
$\cos(u(x))$ Exemple : $\cos(ax+b)$	$-u'(x)\sin u(x)$ $-a\sin(ax+b)$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$

Exercice : Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \sin(\ln(\sqrt{x^2+1})), x \in \mathbb{R}$.

5.4.3 Propriétés des fonctions dérivables

Croissance , décroissance et bijections.

Definition 20

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

1. f est croissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
2. f est strictement croissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
3. f est décroissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.
4. f est strictement décroissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
5. f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante.
6. f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition 21

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. *f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).*
2. *Si f vérifie $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.*
3. *Si f dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\forall x \in]a, b[$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a, b]$.*

Definition 22

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit la fonction $f : I \to J$. On dit que f est une bijection de I sur J s'il existe une application $g : J \to I$ telle que

$$g \circ f(x) = x, \quad \forall x \in I \quad \text{et} \quad f \circ g(y) = y, \quad \forall y \in J.$$

La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

Exercice : Soit $f(x) = x^2 + 1$. Montrer que f définie une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa fonction réciproque.

Remarques

1. Lorsque f est bijective tout élément de y de J a un et un seul antécédent par f dans I.
2. Dans un repère orthonormé la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice de celle de f.
3. $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ est une bijection et $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ avec $f^{-1}(x) = x^2$.
4. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ et $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ avec $f^{-1}(x) = e^x$.

Theorem 23

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Si f est continue et strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) alors f est une bijection de I dans l'intervalle image $J = f(I)$. Le fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et a le même sens de variation que f.

(Admis sera démontré au second semestre)

Exercice : Soit $f(x) = x - \sin(x)$. Montrer que f est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à déterminer. Quel est le sens de variation de f^{-1} ?

Theorem 24

Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone et continue sur I, dérivable en x_0. Alors l'application réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(Admis sera démontré au second semestre) Nous avons aussi la formulation équivalente suivante

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exercice : (1) Soit $f(x) = xe^x$. Montrer que f définie une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
(2) Quel est le sens de variation de f^{-1}.
(3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
(4) Calculer $f(1)$ et $(f^{-1})'(e)$.

5.5 Fonctions logarithme et exponentielle (rappels)

Il s'agit de réviser les fonctions déjà connues : logarithme, exponentielle,

5.5.1 Logarithme népérien

On admet l'existence du *logarithme népérien* (noté $\ln$) (ou $\log$), unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont la dérivée est égale à $x \to \frac{1}{x}$.

Propriétés 25

1. *La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$*
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad$ *et* $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x - 1$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

A démontrer :

- Pour le 2 on considère la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ qui a la même dérivée que $x \mapsto \ln x$.
- pour le 3 on utilise l'égalité $\ln 2^n = n \ln 2$ (déjà vu au lycée).

Exercice : (1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x-1) - \ln(2x-1) + \ln 4 = 0$.
(2) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

5.5.2 Exponentielle de base e

La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *exponentielle de base e* et est notée exp ou $x \mapsto e^x$.

Propriétés 26

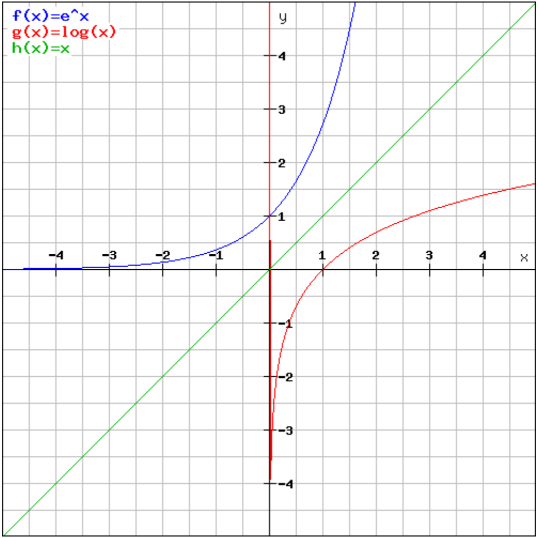
- *La fonction exp est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.*
- *Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x)$.*
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x\, e^y$.
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exercice : (1) Etudier la parité de la fonction : $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - e^x - 2 = 0$.

(3) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$.

Courbe représentative de ln x et e^x



5.5.3 Fonctions puissances

Definition 27

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit la fonction *puissance* f_α sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}, \qquad x > 0.$$

On note : $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Proposition 28

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance $x \to x^\alpha$ est une fonction continue dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée

$$x \to \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Remarque

- Si $\alpha = n$, $n \geq 1$, on retrouve bien la fonction $x \to x^n = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$. En effet, lorsque $x > 0$ on a $e^{n \ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n$.
- Si $\alpha = \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$, on retrouve la fonction $x \to x^{\frac{1}{n}}$, qu'on appelle aussi la racine nième. Nous avons $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ ($x \to x^{1/2}$ racine carrée, $x \to x^{1/3}$ racine cubique).

Propriétés 29

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *et soient* $x > 0$ *et* $y > 0$ *alors*

1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
2. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

5.5.4 Croissances comparées

Proposition 30

$\forall \alpha > 0$ *et* $\forall \beta > 0$ *on a*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

On peut dire que la fonction puissance impose sa limite à la fonction ln, et que la fonction exp impose sa limite à la fonction puissance en $+\infty$.
$(\ln x)^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$...

Exercice : Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to+\infty} x^3 - e^x$

(2) $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x\ln(x)}$

(4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$

5.6 Fonctions circulaires et leurs réciproques

Dans cette section il s'agit : de réviser les fonctions circulaires et de découvrir de nouvelles fonctions : les fonctions circulaires réciproques.

5.6.1 Fonctions circulaires

Les fonctions *sinus et cosinus* sont supposées connues.

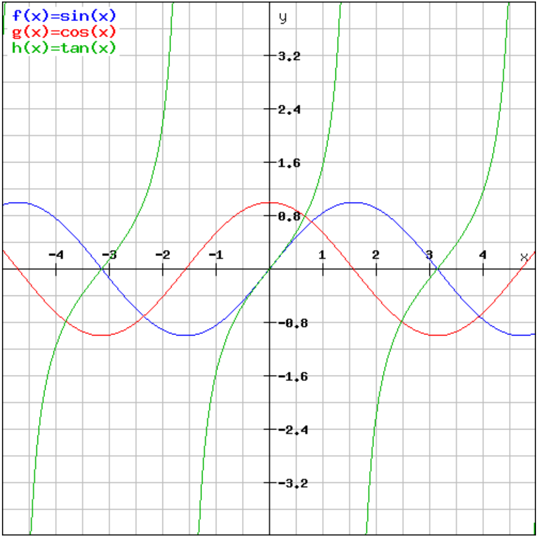
Propriétés 31

- *La fonction cosinus est continue sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique, paire.*
- *La fonction sinus est continue sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique, impaire.*
- *La fonction tangente est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$*, continue sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*),* π*-périodique, impaire.*
- *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos(x) \quad (\cos)'(x) = -\sin(x)$$

- *La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*), et :* $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Courbes représentatives de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$



5.6.2 Fonctions circulaires réciproques

La restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.
C'est donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, +1]$. La bijection réciproque est appelée *Arc sinus* et est notée $x \mapsto \arcsin x$.

Definition 32

Pour tout $x \in [-1, +1]$, $\arcsin x$ est l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel le sinus est x :

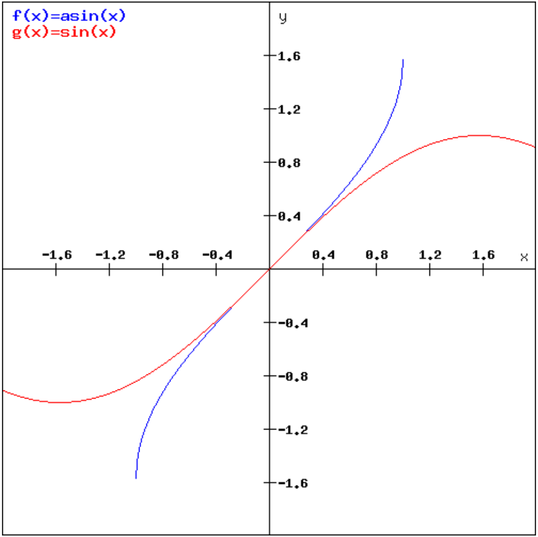
$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \arcsin x \\ x & \in & [-1, +1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sin y \\ y & \in & \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Propriétés 33

La fonction $\arcsin$ *est impaire.* $\arcsin$ *est continue et strictement croissante sur* $[-1, +1]$*. Elle est dérivable sur* $]-1, +1[$ *et*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Courbe représentative de $\sin x$ et $\arcsin x$.



Exercice : Calculer les nombres suivants :

(i) $\arcsin(\frac{1}{2})$ (ii) $\sin(\arcsin(\frac{1}{5}))$ (iii) $\arcsin(\sin \frac{18\pi}{5})$ (iv) $\arcsin(\sin \frac{15\pi}{7})$.

II- Arc cosinus.

La restriction à $[0, +\pi]$ de la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, +\pi]$.
C'est donc une bijection de $[0, +\pi]$ dans $[-1, +1]$. La bijection réciproque est appelée *Arc cosinus* et est notée $x \mapsto \arccos x$.

Definition 34

Pour tout $x \in [-1, +1]$, $\arccos x$ est l'unique élément de $[0, +\pi]$ pour lequel le cosinus est x :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & \arccos x \\ x & \in & [-1, +1] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \cos y \\ y & \in & [0, +\pi] \end{array} \right.$$

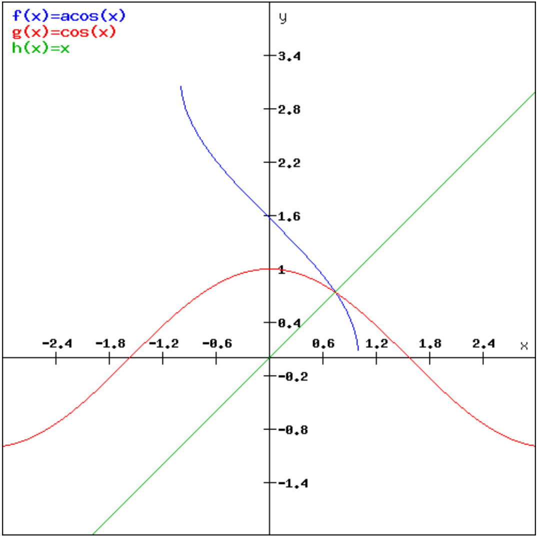
Propriétés 35

La fonction $\arccos$ *est continue et strictement décroissante sur* $[-1, +1]$*.*
Elle est dérivable sur $]-1, +1[$ *et*

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercice : Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $arccos(x) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Courbe représentative de $\cos x$ et $\arccos x$.



Exercice : Calculer les nombres suivants :

(i) $\cos(\arccos(-\frac{1}{3}))$ (ii) $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ (iii) $\arccos(\cos\frac{18\pi}{5})$ (iv) $\arccos(\cos\frac{15\pi}{7})$
(v) $\arccos(\sin\frac{5\pi}{12})$ (remarquer que $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$).

III- Arc tangente.

La restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Ses limites aux bornes sont $+\infty$ et $-\infty$, en effet $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$. C'est donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée *Arc tangente* et est notée $x \mapsto \arctan x$.

Definition 36

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ pour lequel la tangente est x :

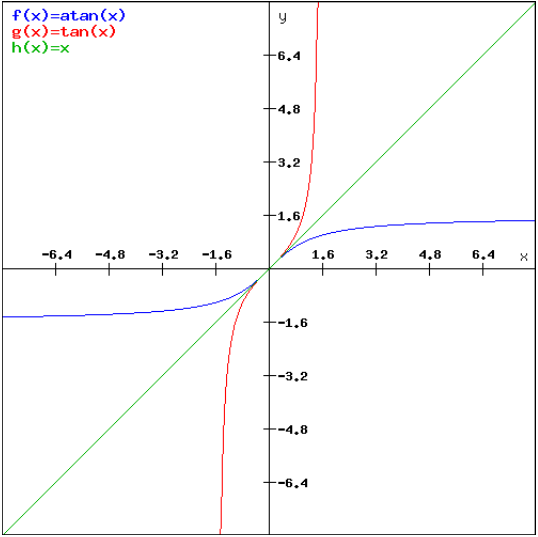
$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \arctan x \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \tan y \\ y & \in & \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\end{array} \right.$$

Propriétés 37

La fonction $\arctan$ *est impaire.* $\arctan$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*. Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Courbe représentative de $\tan x$ et $\arctan x$.



Exercice : Calculer les nombres suivants :
(i) $\arctan(\sqrt{3})$ (ii) $\tan(\arctan(100))$ (iii) $\arctan(\tan \frac{18\pi}{5})$.